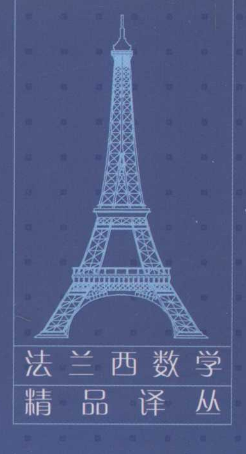
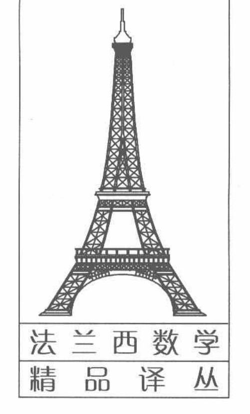


谱理论讲义（第二版）

□ J. 迪斯米埃 著
□ 姚一隽 译





数学天元基金资助项目

谱理论讲义

（第二版）

□ J. 迪斯米埃 著
□ 姚一隽 译





图字：01-2008-4985

Nous tenons à remercier M. le Professeur Jacques Dixmier d'avoir autorisé la publication sans droit d'auteur de ce livre en chinois.
诚挚感谢 J. 迪斯米埃教授免费赠与本书的中文版权。

图书在版编目(CIP)数据

谱理论讲义 /(法) 迪斯米埃 (Dixmier, J.) 著；姚一隽译. --2 版. --北京：高等教育出版社，2013. 1
(法兰西数学精品译丛)
ISBN 978-7-04-036469-9

Ⅰ. ①谱… Ⅱ. ①迪… ②姚… Ⅲ. ①希尔伯特空间-线性算子理论-谱分析 (数学)-研究生-教材 Ⅳ. ①O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 277284 号

策划编辑 王丽萍　责任编辑 李华英　封面设计 王凌波　版式设计 于 婕
责任校对 刘 莉　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	保定市中画美凯印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm × 1092mm 1/16		
印　张	12	版　次	2008 年12月第 1 版
字　数	220 千字		2013 年 1 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2013 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 36469-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗散发着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗瓦、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及里翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 源于我们国家综合国力的提高所给予的有力支撑, 源于改革开放国策所带来的强大推动, 也源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月 26 日

中 译 本 序

希尔伯特空间上的分析及算子的谱理论是现代数学、物理及工程科学的众多分支中不可或缺的工具, 特别是在下述领域中:

—— 偏微分方程理论;

—— 量子力学;

—— 信号处理;

—— 遍历理论.

约翰 · 冯 · 诺伊曼是 1930 年左右认识到希尔伯特空间上的分析在量子力学中的重要性的先驱之一. 在这之后, 希尔伯特空间上的算子理论始终在不停地发展, 而源于群表示论、量子场论、量子统计力学以及 Alain Connes 自 20 世纪 80 年代起开创和发展的非交换几何的需要都为这种发展提供了强大的动力.

雅克 · 迪斯米埃在算子代数领域有着巨大的影响. 除了他自己在这一领域所作出的重要贡献, 他还为传播穆雷 (F.J.Murray) 和冯 · 诺伊曼的工作做了许多努力. 他的专著 *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (英译本 *von Neumann Algebras*) 和 *Les C^*-algèbres et leurs représentations* (英译本 *C^*-algebras*) 在问世后的几十年里一直是世界各国该领域的工作者入门与参考的必备书籍. 他创立并长期领导的法国算子代数学派, 至今在世界上仍是具有极大影响力的. 他还直接或间接指导了为数众多的研究生. 不仅如此, 他在其他一些数学领域, 比如李群的表示论以及包络代数理论中, 都有很杰出的工作.

雅克 · 迪斯米埃不仅是一位伟大的数学家, 还是一位众所周知的优秀教师. 他的 *Cours de mathématiques du premier cycle* ① 曾为无数法国学生所使用. 在硕士水平上, 雅克 · 迪斯米埃在巴黎第六大学 (又称皮埃尔和玛丽 · 居里大学) 曾经教授过多

①译者注:《大学数学教程》, 两卷, 其中第一卷有高等教育出版社的中译本.

年的《希尔伯特空间上的算子谱理论》. 他发给学生的手写油印讲义就是本书的原稿. 在法国有好几代学生曾得益于此.

仅仅要求点集拓扑和积分理论的非常简单的基础知识, 这一教程给出了算子谱理论的非常清晰、优雅而且完备的叙述. 在用初等方法讲述了希尔伯特空间的基本工具以后, 所有的基本结果都被循序渐进地涉及了, 直到无界自共轭算子的谱分解和对称算子的自共轭扩张的研究: 这些是所有希望深入学习数学或者物理的学生都必须掌握的一些知识.

非常遗憾, 本书稿在法国并没有出版. 我们有理由相信, 由雅克 · 迪斯米埃的再传弟子之一姚一隽所翻译的这一中文版将使为数众多的中国读者都能够从中受益. 本书必将成为这一领域的师生与科研工作者的案头用书.

克莱尔 · 阿南塔哈曼 – 德拉霍什
法国奥尔良大学教授[1]

[1]克莱尔 · 阿南塔哈曼 – 德拉霍什 (Claire Anantharaman-Delaroche) 是雅克 · 迪斯米埃的学生, 奥尔良大学教授, 算子代数专家.

目　　录

历 史 回 顾

许多数学物理问题 (Dirichlet 问题, 膜振动问题, 等等) 最后都归结为积分方程.

积分方程的例. 设 K 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上给定的复值函数. 对于函数 $x:[a,b]\to\mathbb{C}$, 我们由

$$\int_a^b K(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \tag{1}$$

来定义 $y:[a,b]\to\mathbb{C}$.

若 y 已知而 x 未知, 有没有解, 有多少解?

1900 年前后, 若干数学家 (Schwarz, Poincaré, Fredholm) 用逼近方法研究过这个问题. 我们用间距非常小的点 $s_1,\cdots,s_n$ 来分割区间 $[a,b]$; 考虑函数 x (或者 y) 在这些点的取值 $x_1,\cdots,x_n$ (或者 $y_1,\cdots,y_n$). 于是积分方程 (1) 就变成了

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_j = y_i \quad (i=1,\cdots,n), \tag{2}$$

其中 k_{ij} 是已知复数. 然后我们对于 $n\to+\infty$ 取极限.

解方程 (2) 的关键在于分析 $\mathbb{C}^n$ 上以 (k_{ij}) 为矩阵的线性算子 u. 类似地, 要解决 (1), 就是要分析把 $[a,b]$ 上的函数 x 变成由 (1) 定义的函数的变换 v.

在有限维的情形, 要分析一个一般的线性算子已经相当麻烦了, 我们知道这最后归结到 Jordan 分解. 如果我们有 $k_{ij}=\overline{k_{ji}}$, 那么情况就要简单得多. 这个时候我们总能够选取一组标准正交基来把 u 化简为对角矩阵. 同样, 对于 (1) 的分析在函数 K 是 "Hermite" (即 $K(y,x)=\overline{K(x,y)}$) 的时候也会变得简单.

研究 (1) 的另外一个办法是 Hilbert 提出的:

为简单起见, 假设 $[a,b]=[0,2\pi]$. 设 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{int}$ 是 y 的 Fourier 展开式, 并设

$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{int}$ 是 x 的 Fourier 展开式: 这里 a_n 是未知量. 而函数 $t \mapsto \int_0^{2\pi} K(s,t)x(s)\ \mathrm{d}s$ 的 Fourier 系数为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}t \int_0^{2\pi} K(s,t)x(s)\ \mathrm{d}s.$$

这样我们就有等式

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(s,t)\mathrm{e}^{-int}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_p \mathrm{e}^{ips}\right)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(s,t)\mathrm{e}^{ips}\mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

于是我们就得到一个由无穷多个未知量和无穷多个方程构成的线性方程组.

一言以蔽之, 通过不同的方式, 最终我们都把问题归结为研究无限维向量空间上的线性算子, 特别是 Hermite 算子. 我们要选择适当的无限维空间: 在本书中处理的都是 Hilbert 空间.

0 可和族 (点集拓扑学复习)

---

1) 设 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是一个复数序列; 我们有级数 $\sum x_n$ 的收敛性的概念, 也可以在级数收敛的前提下定义它的和; 这个概念和指标集合 $\{1, 2, \cdots\}$ 的自然序有关. 在很多情况下 (两重级数等), 我们需要讨论的复数集合的指标集没有明显合适的序; 但是仍然要讨论这样的复数集合的可求和性及其和数.

2) 设 $(x_i)_{i \in I}$ 是一族复数, 其中 I 是任意集合. 我们称它**可和且和为** s, 如果:

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于 I 中任意包含 J_0 的有限子集 J, 都有

$$|s_J - s| \leqslant \varepsilon \quad \left(\text{这里我们记 } s_J = \sum_{i \in J} x_i\right).$$

这时我们记

$$s = \sum_{i \in I} x_i.$$

3) Cauchy **判别准则**. 一个族 $(x_i)_{i \in I}$ 可和, 当且仅当: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于 I 中任意与 J_0 不交的有限子集 K, 我们都有 $|s_K| \leqslant \varepsilon$.

4) **定理**. 一个族 $(x_i)_{i \in I}$ 可和, 当且仅当族 $(|x_i|)_{i \in I}$ 可和.

5) 当 $I = \mathbb{N}$ 时, 我们可以讨论级数 $\sum x_i$ 是否收敛, 或者是否绝对收敛. 各种相关概念之间的关系总结如下:

$$\begin{array}{ccc} \text{族 } (x_i)_{i \in I} \text{ 可和} & \Longleftrightarrow & \text{族 } (|x_i|)_{i \in I} \text{ 可和} \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ \text{级数 } \sum x_i \text{ 收敛} & \Longleftarrow & \text{级数 } \sum x_i \text{ 绝对收敛} \end{array}$$

而且, 若族 $(x_i)_{i \in I}$ 可和, 则其和就是级数 $\sum x_i$ 的和.

6) 设有满足 $x_i \geqslant 0$ 的一族数 $(x_i)_{i\in I}$, 则

$$(x_i)_{i\in I}\ \text{可和} \iff (s_J)_{J\subset I,\, J\ \text{有限}}\text{是有界的},$$

且在此情况下

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\subset I,\ J\ \text{有限}} s_J.$$

如果 (s_J) 不是有界的, 那么族 $(x_i)_{i\in I}$ 就不是可和的; 这时我们记

$$\sum_{i\in I} x_i = +\infty.$$

这样任意一个非负数族就都可以求和.

如果 $I=\mathbb{N}$, $\sum_{i\in I} x_i$ 就是和数 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 的上确界, 我们就得到通常记为 $\sum x_i$ 的数.

7) 设 E 是一个完备赋范空间, 设 $(x_i)_{i\in I}$ 是 E 中一族向量, 我们称 $(x_i)_{i\in I}$ 可和且其和为 s (这里 $s\in E$), 如果:

对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于 I 中任意包含 J_0 的有限子集 J, 都有

$$\|s_J - s\| \leqslant \varepsilon \quad \left(\text{这里我们记 } s_J = \sum_{i\in J} x_i\right).$$

这时我们记

$$s = \sum_{i\in I} x_i.$$

8) 这一情况下的 Cauchy 判别准则和 3) 中完全一样, 只需把绝对值换成向量的模即可.

9) 在一般情况下, 我们只有

$$(x_i)_{i\in I}\ \text{可和} \Longleftarrow (\|x_i\|)_{i\in I}\ \text{可和}.$$

10) 当 $I=\mathbb{N}$ 时,

$$\begin{array}{ccc} \text{族 } (x_i)_{i\in I}\ \text{可和} & \Longleftarrow & \text{族 } (\|x_i\|)_{i\in I}\ \text{可和} \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ \text{级数 } \sum x_i\ \text{收敛} & \Longleftarrow & \text{级数 } \sum \|x_i\|\ \text{收敛} \end{array}$$

I Hilbert 空间

1.1 半双线性型

1.1.1 设 E, F 是复向量空间. 所谓$E \times F$ 上的**半双线性型**是指从 $E \times F$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个满足下述条件的映射 f:

$$\text{对于 } x_1, x_2 \in E, y \in F, \text{ 有 } f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y); \tag{1}$$

$$\text{对于 } x \in E, y \in F, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ 有 } f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y); \tag{2}$$

$$\text{对于 } x \in E, y_1, y_2 \in F, \text{ 有 } f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2); \tag{3}$$

$$\text{对于 } x \in E, y \in F, \mu \in \mathbb{C}, \text{ 有 } f(x, \mu y) = \overline{\mu} f(x, y). \tag{4}$$

1.1.2 由 (1), (2), (3), (4), 我们得到, 对于任意的 $x_1, \cdots, x_n \in E$, $y_1, \cdots, y_p \in F$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $\mu_1, \cdots, \mu_p \in \mathbb{C}$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \overline{\mu_j} f(x_i, y_j). \tag{5}$$

1.1.3 **例.** 考虑 $E = F = \mathbb{C}^n$, 并对 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{C}$ 定义

$$f((\lambda_1, \cdots, \lambda_n), (\mu_1, \cdots, \mu_n)) = \lambda_1 \overline{\mu_1} + \cdots + \lambda_n \overline{\mu_n},$$

则 f 是 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 上的一个半双线性型.

1.1.4 **例.** 更一般地, 设 E, F 是两个有限维线性空间, $(a_1, \cdots, a_n)$ 是 E 的一组基, $(b_1, \cdots, b_p)$ 是 F 的一组基. 设 (α_{ij}) 是一个 $n \times p$ 复矩阵. 对于 $x =$

$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in E$ 和 $y = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_p b_p \in F$, 定义

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \lambda_i \overline{\mu_j}.$$

容易验证, f 是 $E \times F$ 上的一个半双线性型. 如果 $E = F = \mathbb{C}^n$, 所选择的基正好是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基, 且 $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronecker 符号), 那么我们又重新得到上面的例 1.1.3.

1.1.5 例 1.1.4 的意义在于, 它给出了有限维空间上半双线性型的最一般形式. 具体地说, 设 E, F, (a_i), (b_j) 如 1.1.4 中所述. 设 $\mathcal{S}$ 是 $E \times F$ 上全体半双线性型构成的集合, 而 $\mathcal{M}$ 是所有 $n \times p$ 复矩阵构成的集合. 对于任意 $M \in \mathcal{M}$, 我们根据 1.1.4 定义一个 $E \times F$ 上的半双线性型. 对于任意的 $f \in \mathcal{S}$, 我们可以定义 f **关于基** (a_i), (b_j) **的矩阵**, 即由 $\alpha_{ij} = f(a_i, b_j)$ 定义的 $n \times p$ 复矩阵 (α_{ij}). 这样我们就得到了一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{S}$ 的映射和一个从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{M}$ 的映射. **它们是互逆双射**. 事实上:

1. 设 $f \in \mathcal{S}$. 若 f 的矩阵是 (α_{ij}), 而 (α_{ij}) 对应的半双线性型是 g, 则我们有

$$g(a_i, b_j) = \alpha_{ij} = f(a_i, b_j),$$

这样根据 (5) 就得到 $f = g$.

2. 设 $(\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}$. 设 f 是 (α_{ij}) 对应的半双线性型, 而 (β_{ij}) 是 f 的矩阵. 我们有

$$\beta_{ij} = f(a_i, b_j) = \alpha_{ij},$$

所以 $(\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})$.

这样我们就能够构造出所有有限维的半双线性型.

1.1.6 设 E 是一个复线性空间, f 是 $E \times E$ 上的一个半双线性型. 那么只要对于所有的 $x \in E$ 知道 $f(x,x)$, 我们就可以确定所有 f 的值了. 事实上, 我们有下述恒等式 (称为**极化恒等式**):

$$4f(x,y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + \mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}f(x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y). \quad (6)$$

这是因为

$$\begin{aligned}
f(x+y, x+y) &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y), \\
-f(x-y, x-y) &= -f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) - f(y,y), \\
\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) &= \mathrm{i}f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) + \mathrm{i}f(y,y), \\
-\mathrm{i}f(x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y) &= -\mathrm{i}f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) - \mathrm{i}f(y,y),
\end{aligned}$$

以上四式相加即得 (6) 式.

1.1.7 在和 1.1.6 同样的假设下, 我们用完全类似的方式可以得到下述恒等式 (称为**对角线恒等式**):

$$f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y)=2f(x,x)+2f(y,y). \tag{7}$$

1.2 Hermite 型

1.2.1 设 E 是一个复线性空间. 我们称 $E\times E$ 上的一个半双线性型是一个 Hermite **型**, 若它还满足下述条件: 对于 $x,\ y\in E$,

$$f(y,x)=\overline{f(x,y)}. \tag{8}$$

1.2.2 如果一个 $E\times E$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 f 满足 (1), (2) 和 (8), f 显然是一个 Hermite 型.

1.2.3 例 1.1.3 是 $\mathbb{C}^n$ 上的 Hermite 型的一个例子.

1.2.4 设 E 是一个有限维复线性空间, $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 E 的一组基, f 是 $E\times E$ 上的一个半双线性型, (α_{ij}) 是它关于基 (e_i), (e_i) 的矩阵 (或者更为简明地称之为 f 关于基 (e_i) 的矩阵). f 是 Hermite 型当且仅当 (α_{ij}) 是 Hermite 矩阵, 即对于任意的 i 和 j 有 $\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}$. 必要性是显然的, 充分性部分可以用 (5) 证明.

1.2.5 定理. *设 E 是一个复向量空间, f 是 $E\times E$ 上的一个半双线性型. 下述条件是等价的:*

(i) f 是 Hermite 型;

(ii) 对于任意的 $x\in E$, $f(x,x)\in\mathbb{R}$.

若 f 是 Hermite 型, 则对于任意的 $x\in E$, $f(x,x)=\overline{f(x,x)}$, 即 $f(x,x)\in\mathbb{R}$.

假设我们已有条件 (ii). 对于 $x,y\in E$, 定义 $g(x,y)=\overline{f(y,x)}$. 那么显然 g 是 $E\times E$ 上的一个半双线性型. 由假设, 我们知道对于任意的 $x\in E$, $g(x,x)=f(x,x)$, 所以由 (6), $f=g$, 所以 f 是 Hermite 型.

1.2.6 设 f 是 E 上 Hermite 型. 我们称 E 中元素 x, y (关于 f) 是**正交的**, 若 $f(x,y)=0$. 这个关系对于 x 和 y 是对称的. E 中子集 M, N 称为**正交的**, 若 M 中任意元素和 N 中任意元素都是正交的. 若 M 和 N 正交, 则 M 中元素的任意线性组合和 N 中元素的任意线性组合都是正交的.

1.2.7 设 $M\subset E$, E 中和 M 正交的全体元素构成的集合是 E 的一个线性子空间, 记作 $M^\perp$, (不太精确地) 称为 **E 中和 M 正交的子空间**.

1.2.8 特别地, $E^{\perp}$ 是 E 的一个线性子空间, 称为 f 的**核**, 这是满足对于所有的 $y \in E$ 都有 $f(x,y)=0$ 的那些 $x \in E$ 构成的集合. 若 $E^{\perp} \neq \{0\}$, 则称 f 是**退化的**; 若 $E^{\perp} = \{0\}$, 则称 f 是**非退化的**. 退化型的一个极端情形是 $E \neq \{0\}$, 而 f 恒等于 0 (此时我们有 $E^{\perp} = E$).

1.2.9 以 E' 记线性空间 $E/E^{\perp}$. 在取商空间的过程中, 可以由 f 得到 E' 上的一个 f'. 对于 x', $y' \in E'$. 取 x', y' 在 E 中的代表元 x, y. 则 $f(x,y)$ 只依赖于 x', y', 而和具体的代表元无关; 事实上, 如果 x_1, y_1 是 x', y' 的另外一组代表元, 我们有 $x_1 = x + u$, $y_1 = y + v$ (其中 $u, v \in E^{\perp}$), 因此

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f(x,y) + f(x,v) + f(u,y) + f(u,v) \\ &= f(x,y) + 0 + 0 + 0 = f(x,y). \end{aligned}$$

于是我们可以定义 $f'(x',y') = f(x,y)$. 因为 f 是 Hermite 型, 我们立即可以得到 f' 也是 Hermite 型. **后者是非退化的**. 事实上, 设 $x' \in E'$, 并设对于任意的 $y' \in E'$ 都有 $f'(x',y') = 0$. 选择 x' 在 E 中的代表元 x. 那么对于任意的 $y \in E$, $f(x,y) = 0$, 所以 $x \in E^{\perp}$, 即 $x' = 0$.

我们称 f' 是**和** f **相关联的非退化** Hermite **型**. 若 f 本身就是非退化的, 则 f' 就是 f.

这个构造使得我们可以把关于 Hermite 型的几乎所有问题都归结到非退化的情形.

1.2.10 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 E 中两两正交元素. 我们有 (**勾股定理**[①]):

$$f(x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1, x_1) + \cdots + f(x_n, x_n). \tag{9}$$

这是 (5) 的直接推论.

1.3 准 Hilbert 空间

1.3.1 设 f 是 E 上的一个 Hermite 型. 我们称 f 是 (**半**) **正** (**定**) 的, 如果对于任意的 $x \in E$, $f(x,x) \geqslant 0$. 一个复线性空间及其上一个 (半) 正 (定) Hermite 型就构成了一个 (复) **准** Hilbert **空间**. 有时候一个 (半) 正 (定) Hermite 型也称为一个**数量积**. 在研究一个准 Hilbert 空间 E 的时候, 我们通常用 $(x|y)$ 来表示 E 中两个元素 x 和 y 的数量积.

1.3.2 设 E_1, E_2 是准 Hilbert 空间. 所谓 E_1 到 E_2 的一个**同构映射**是指一个从 E_1 到 E_2 的线性双射 f, 对于任意的 x, $y \in E_1$, 满足 $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. 两个准 Hilbert 空间称为是**同构的**, 如果存在从第一个空间到第二个空间的一个同构映射.

[①] 译者注: 原文直译是“毕达哥拉斯定理”.

1.3.3 例. 1.1.3 中给出的 Hermite 型是半正定的. 我们称之为 $\mathbb{C}^n$ **上的典范数量积**.

1.3.4 例. 但是, 当 $p < n$ 时, 由

$$f((\lambda, \cdots, \lambda_n), (\mu_1, \cdots, \mu_n)) = \lambda_1\overline{\mu_1} + \cdots + \lambda_p\overline{\mu_p} - \lambda_{p+1}\overline{\mu_{p+1}} - \cdots - \lambda_n\overline{\mu_n}$$

定义的 $\mathbb{C}^n$ 上 Hermite 型 f 就不是半正定的.

1.3.5 例. 设 E 是所有形如 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 的只有有限项非零的复数序列构成的复向量空间. 对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots), (\mu_1, \mu_2, \cdots) \in E$ 定义

$$((\lambda_1, \lambda_2, \cdots)|(\mu_1, \mu_2, \cdots)) = \lambda_1\overline{\mu_1} + \lambda_2\overline{\mu_2} + \cdots .$$

容易验证, 这样我们就给出了 E 上的一个数量积.

1.3.6 例. 更一般地, 设 I 是一个集合. 设 E 是由那些只有有限项非零的复数集合 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 构成的复线性空间. 对于 $(\lambda_i)_{i\in I}$, $(\mu_i)_{i\in I} \in E$, 定义 $((\lambda_i)|(\mu_i)) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\overline{\mu_i}$. 我们得到 E 上的一个数量积. 对于 $I = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 我们得到例 1.3.5; 对于 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, 我们得到例 1.3.3.

1.3.7 例. 设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中线段. 设 E 是 Δ 上具有紧支集的连续复值函数构成的集合. 它自然地是一个复线性空间. 对于 $g, h \in E$, 定义

$$(g|h) = \int_\Delta g(t)\ \overline{h(t)}\ \mathrm{d}t.$$

容易证明, 这样我们就定义了 E 上的一个数量积.

1.3.8 例. 更一般地, 设 X 是一个局部紧空间, μ 是 X 上一个正测度. 设 E 是 X 上有紧支集的连续复值函数构成的线性空间. 对于 $g, h \in E$, 定义

$$(g|h) = \int_X g(t)\ \overline{h(t)}\ \mathrm{d}\mu(t).$$

我们得到 E 上的一个数量积. 我们取 X 为线段 Δ, 而 μ 为 Δ 上的 Lebesgue 测度, 我们就得到了例 1.3.7. 取 X 为一个离散空间 I, 而测度 μ 在 I 的每一点都有质量 1, 我们就得到了例 1.3.6.

1.3.9 例. 设 E 是满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$ 的序列 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 全体构成的集合. 对于任意复数 α 和 β, 利用对角线恒等式的一种非常特殊的形式, 我们有

$$|\alpha + \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 - |\alpha - \beta|^2 \leqslant 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

易知 E 具有自然的复线性空间结构. 对于 $(\lambda_n), (\mu_n) \in E$ 和任意的 n,

$$2|\lambda_n||\mu_n| \leqslant |\lambda_n|^2 + |\mu_n|^2.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\mu_n}$ 绝对收敛. 这样可以定义

$$((\lambda_n)|(\mu_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\mu_n}.$$

我们就定义了 E 上的一个数量积. **这样得到的准** Hilbert **空间记作** ℓ^2.

1.3.10 例. 更一般地, 对于集合 I, 以 E 记所有满足 $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < +\infty$ 的族 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 的集合. 它具有一个自然的复向量空间结构. 对于 $(\lambda_i), (\mu_i) \in E$, 族 $(\lambda_i \mu_i)_{i\in I}$ 是可和的. 我们可以用

$$((\lambda_i)|(\mu_i)) = \sum_{i\in I} \lambda_i \overline{\mu_i}$$

来定义 E 上的数量积. **这样得到的准** Hilbert **空间记作** $\ell^2(I)$.

设 I 和 J 是等势集, 则 $\ell^2(I)$ 和 $\ell^2(J)$ 同构. 特别地, 若 I 是可数无限集, 则 $\ell^2(I)$ 和 ℓ^2 同构. 若 I 是有限集, 有 n 个元素, 则 $\ell^2(I)$ 和具备典范数量积的 $\mathbb{C}^n$ 同构.

1.3.11 例. 设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中线段, E 是 Δ 上对于 Lebesgue 测度平方可积的复值函数全体构成的集合. 因为对于 $g, h \in E$,

$$|g+h|^2 \leqslant 2|g|^2 + 2|h|^2,$$

集合 E 具有自然的复向量空间结构. 若 $g, h \in E$, 乘积 $g\bar{h}$ 在 Δ 上是可测的, 且根据

$$2|g||h| \leqslant |g|^2 + |h|^2,$$

$g\bar{h}$ 在 Δ 上是可积的. 因此我们可以用

$$(g|h) = \int_\Delta g(t)\, \overline{h(t)}\, \mathrm{d}t$$

来定义 E 上的一个数量积. **这样得到的准** Hilbert **空间记作** $\mathcal{L}^2(\Delta)$.

1.3.12 例. 更一般地, 对于一个局部紧空间 X 和其上一个正测度 μ (或者更为一般地考虑一个测度空间 (X, μ)). 设 E 是 X 上关于 μ 平方可积的复值函数构成的复线性空间. 对于 $g, h \in E$, $g\bar{h}$ 可积, 我们可以用

$$(g|h) = \int_X g(t)\, \overline{h(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)$$

来定义 E 上的一个数量积. **这样得到的准** Hilbert **空间记作** $\mathcal{L}^2(X, \mu)$. 取例 1.3.8 中的 X 和 μ 就可以得到例 1.3.10 和 1.3.11.

1.3.13 定理 (Cauchy-Schwarz 不等式). 设 E 是一个准 Hilbert 空间. 对于任意的 $x, y \in E$, 我们有

$$|(x|y)|^2 \leqslant (x|x)(y|y).$$

对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有

$$0 \leqslant (x+\lambda y|x+\lambda y) = \lambda\overline{\lambda}(y|y) + \lambda(y|x) + \overline{\lambda}(x|y) + (x|x). \tag{10}$$

两边乘 $(y|y)$, 我们由计算可得

$$0 \leqslant (\lambda(y|y) + (x|y))(\overline{\lambda}(y|y) + (y|x)) + (x|x)(y|y) - (x|y)(y|x). \tag{11}$$

首先假设 $(y|y) \neq 0$. 我们可以取 $\lambda = -(x|y)/(y|y)$, 那么 (11) 就给出

$$0 \leqslant (x|x)(y|y) - (x|y)(y|x),$$

即定理中的不等式. 若 $(x|x) \neq 0$, 那么只要在上述推理中交换 x 和 y 的位置就可以了. 最后, 若 $(x|x) = (y|y) = 0$, 则 (10) 就简化为

$$0 \leqslant \lambda(y|x) + \overline{\lambda}(x|y). \tag{12}$$

在 (12) 中取 $\lambda = -(x|y)$, 就得到

$$0 \leqslant -(x|y)\overline{(x|y)} - \overline{(x|y)}(x|y) = -2|(x|y)|^2,$$

即 $(x|y) = 0$. 定理中的不等式仍然成立.

1.3.14 设 E 是一个准 Hilbert 空间, E' 是 E 的一个线性子空间. E 上的一个数量积在 E' 上的限制是 E' 上的一个数量积. 这样, E' 自动就是一个准 Hilbert 空间.

例如, 例 1.3.5 (相应地, 1.3.6, 1.3.7, 1.3.8) 中考虑的准 Hilbert 空间就是 ℓ^2 (相应地, $\ell^2(I)$, $\mathcal{L}^2(\Delta)$, $\mathcal{L}^2(X,\mu)$) 的准 Hilbert 子空间.

1.4 内积空间[①]

1.4.1 定理. 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 则 $E^{\perp}$ 是 E 中满足 $(x|x) = 0$ 的 x 全体构成的集合.

设 $x \in E^{\perp}$, 显然我们有 $(x|x) = 0$. 反之, 假设 $(x|x) = 0$. 根据 1.3.13, 对于任意的 $y \in E$, 我们有 $(x|y) = 0$, 所以 $x \in E^{\perp}$.

① 译者注: 原讲义中所用的称谓是 “分离准 Hilbert 空间”.

1.4.2 推论. 设 E 是一个准 Hilbert 空间. E 上的数量积是非退化的, 当且仅当对于 E 中任意的非零 x, 我们有 $(x|x) > 0$.

这是 1.4.1 的直接推论.

1.4.3 定义. 我们称一个准 Hilbert 空间是分离的, 如果其数量积是非退化的[1].

1.4.4 例. 我们直接可以得到例 1.3.3, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.9, 1.3.10 中定义的准 Hilbert 空间都是分离的. (在 Δ 至少有两个点的前提下) 例 1.3.7 中的空间也是如此; 事实上, 设 g 是 Δ 上一个不恒等于 0 的复值连续函数, 那么存在 $t_0 \in \Delta$ 和 $\alpha > 0$ 使得 $|g(t_0)| = \alpha$, 这样在一个长度为 $l > 0$ 的区间上 $|g(t)| \geqslant \dfrac{1}{2}\alpha$. 所以

$$(g|g) = \int_{\Delta} |g(t)|^2 \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4}\alpha^2 l,$$

即 $(g|g) > 0$.

反之, 准 Hilbert 空间 $E = \mathcal{L}^2(\Delta)$ 不是分离的. 事实上, 设 $f \in E$, 我们有

$$(f|f) = 0 \Leftrightarrow \int_{\Delta} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \text{ 几乎处处 } |f(t)|^2 = 0 \Leftrightarrow \text{ 几乎处处 } f(t) = 0.$$

这样, $E^{\perp}$ 不是 $\{0\}$: 它由 Δ 上几乎处处为 0 的复值函数全体构成.

在例 1.3.8 和 1.3.12 中, 空间的分离性依赖于 X 和 μ 的选择.

1.4.5 设 E 是一个准 Hilbert 空间, f 是它的数量积. 设 f' 是 f 对应的非退化 Hermite 形式, 它定义在 $E' \times E'$ 上, 这里 $E' = E/E^{\perp}$. 因为 f 是非负的, 立即可以得到 f' 也是非负的. 这样带有 f' 的 E' 就是一个分离的准 Hilbert 空间, 称之为 E **对应的内积空间**. 这样就可以把关于准 Hilbert 空间的大多数问题化简为关于内积空间的问题.

1.4.6 比如, 对于例 1.3.11 中的空间 $E = \mathcal{L}^2(\Delta)$, (根据 1.4.4) $E^{\perp}$ 由 Δ 上几乎处处为 0 的复值函数全体构成. **内积空间** $E/E^{\perp}$ **记作** $L^2(\Delta)$. 它的元素为 Δ 上平方可积函数的等价类, 两个函数等价当且仅当它们之差几乎处处为 0. 事实上, 对于许多具体的问题, 不过分强调 $\mathcal{L}^2(\Delta)$ 和 $L^2(\Delta)$ 之间的差异是有益的: 我们把一个平方可积函数和它对应的等价类等同起来. 这样我们就在两者之间作转换, 一方面利用 $L^2(\Delta)$ 是可分的, 另一方面我们又把空间的元素视为函数 (而不是函数的等价类, 后者比较难以处理). 在大多数情况下, 做这样的等同处理不会有任何出错的危险. 但是在有些时候, 这么做会导致严重的错误 (只有经验能够帮助我们猜测何时会发生这种情况).

更一般地, $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ 对应的内积空间记作 $L^2(X,\mu)$, 我们也经常把这两个空间等同起来.

---

[1] 依国内泛函界的传统, 本书中使用 "内积空间" 这个名词.

1.4.7 定理. 设 E 是一个具有有限维数 n 的内积空间, 则 E 和带有典范数量积的 $\mathbb{C}^n$ 同构.

对于 $n=0$, 这是显然的. 现在假设对于 $n-1$ 维空间该定理成立. 设 x_0 是 E 中非零元素. 我们有 $(x_0|x_0)>0$. 用适当的复数和 x_0 相乘, 我们可以假设 $(x_0|x_0)=1$. 从 E 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $y\mapsto(y|x_0)$ 给出了一个线性形式 f_0, 它是非零的 (因为 $f_0(x_0)=1$). 取 $F=\operatorname{Ker} f_0$, 这是一个 $n-1$ 维内积空间. 根据归纳假设, 存在从 F 到具备典范数量积的 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的同构 u. 我们有 $x_0\notin F$, 所以 $\mathbb{C}x_0$ 和 F 在 E 内是互补的. E 的任意元素都可以用唯一的方式写成 $y+\lambda x_0$ 的形式, 其中 $y\in F$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 考虑映射 $v:E\to\mathbb{C}^n$, $v(y+\lambda x_0)=(u(y),\lambda)$. 显然 v 是从 E 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性双射. 对 $y'\in F$ 和 $\lambda'\in\mathbb{C}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
(v(y+\lambda x_0)|v(y'+\lambda' x_0)) &= ((u(y),\lambda)|(u(y'),\lambda')) \quad (\text{根据 } v \text{ 的定义})\\
&= (u(y)|u(y'))+\lambda\overline{\lambda'} \quad (\text{根据典范数量积的定义})\\
&= (y|y')+\lambda\overline{\lambda'} \quad (\text{因为 } u \text{ 是一个同构})\\
&= (y|y')+(y|\lambda' x_0)+(\lambda x_0|y')+(\lambda x_0|\lambda' x_0)\\
&\qquad (\text{因为 } y, y'\in F \text{ 且 } (x_0|x_0)=1)\\
&= (y+\lambda x_0|y'+\lambda' x_0).
\end{aligned}
$$

所以 v 是准 Hilbert 空间的同构.

1.4.8 这样我们就得到了同构等价意义下有限维内积空间的完全列表. 无限维内积空间的情形则过于复杂 (参见 1.8.4 和 1.10.1).

1.5 范数, 距离, 内积空间上的拓扑

1.5.1 定理. 设 E 是一个准 Hilbert 空间. 对于 $x\in E$, 我们定义

$$\|x\|=\sqrt{(x|x)}.$$

那么 E 上的函数 $x\mapsto\|x\|$ 是一个半范数; 也就是说

(i) 对于任意的 $x\in E$, $\|x\|\geqslant 0$;

(ii) 对于任意的 $x\in E$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

(iii) 对于任意的 $x, y\in E$, $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

为使这个函数是一个范数, 即

(iv) $\|x\|=0\Rightarrow x=0$,

必须且只需我们考虑的准 Hilbert 空间是分离的, 即处理的是一个内积空间.

(i) 和 (ii) 是显然的. 对于 $x, y \in E$, 我们有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) = (x|x)+(y|y)+2\mathrm{Re}\,(x|y)\\ &\leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2|(x|y)| \leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| \quad (\text{根据 } 1.3.13)\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

这就证明了 (iii). 为使 E 是分离的, 必须且只需

$$x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0,$$

换句话说就是

$$x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0.$$

这就证明了 (iv).

1.5.2 在一个准 Hilbert 空间中, 对角线恒等式 (7) 有下述形式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2. \tag{13}$$

1.5.3 同理, 勾股定理 (9) 可以写成下述形式: 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是两两正交的, 我们有

$$\|x_1+\cdots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

1.5.4 在一个准 Hilbert 空间中, 我们把满足 $\|x\| \leqslant 1$ (相应地, $\|x\| < 1$, $\|x\| = 1$) 的 x 全体构成的集合称为**闭单位球** (相应地, **开单位球**, **单位球面**).

1.5.5 设 E 是一个内积空间. 对于 $x, y \in E$, 定义

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y|x-y)}.$$

由 1.5.1 即知 d 是 E 上的一个**距离**. 这样, E 自然就是一个度量空间, 从而是一个分离拓扑空间 (这表明在 1.4.3 中我们用 "分离" 一词是合理的). E 的拓扑称为**范数拓扑**.

1.5.6 **例.** 在具有典范数量积的 $\mathbb{C}^n$ 上, 我们有

$$d((\lambda_1,\cdots,\lambda_n),(\mu_1,\cdots,\mu_n)) = \sqrt{|\lambda_1-\mu_1|^2+\cdots+|\lambda_n-\mu_n|^2}.$$

众所周知, $\mathbb{C}^n$ 对于这个距离是完备的. 注意到 1.4.7, **所有有限维内积空间都是完备的**.

1.5.7 **例.** 在 ℓ^2 中, 我们有

$$d((\lambda_1,\lambda_2,\cdots),(\mu_1,\mu_2,\cdots)) = \sqrt{|\lambda_1-\mu_1|^2+|\lambda_2-\mu_2|^2+\cdots}.$$

1.5.8　例. 在 $L^2(\Delta)$ 中, 我们有

$$d(f,g)=\left(\int_\Delta |f(t)-g(t)|^2\ \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

1.5.9　定理. 设 E 是一个内积空间.
(i) 从 $E\times E$ 到 E 的映射 $(x,y)\mapsto x+y$ 是连续的;
(ii) 从 $\mathbb{C}\times E$ 到 E 的映射 $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$ 是连续的;
(iii) 从 $E\times E$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $(x,y)\mapsto (x|y)$ 是连续的;
(iv) 从 E 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\mapsto \|x\|$ 是连续的.
设 $x_0, y_0\in E$ 而 $\varepsilon>0$. 设 $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon$ 且 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$, 我们有

$$\begin{aligned}|(x|y)-(x_0|y_0)| &= |(x-x_0|y)+(x_0|y-y_0)|\leqslant |(x-x_0|y)|+|(x_0|y-y_0)|\\ &\leqslant \|x-x_0\|\|y\|+\|x_0\|\|y-y_0\|\leqslant \varepsilon\|y\|+\varepsilon\|x_0\|\\ &\leqslant \varepsilon(\|x_0\|+\|y_0\|+\varepsilon).\end{aligned}$$

这就证明了 (iii). (i) 和 (ii) 的证明更为简单, 留给读者作为练习. 结论 (iv) 是 (iii) 的推论.

1.5.10　设 E 是一个内积空间, F 是 E 的一个线性子空间. **如果 F 是有限维的, 那么 F 在 E 中是闭的**; 事实上, 根据 1.5.6, F 是完备的. 但是, 和通常的几何直觉相反, 我们将看到 (1.5.12 和 1.5.13), E 的任意子空间并不总是闭的.

1.5.11　定理. 设 E 是一个内积空间, $A\subset E$, 则 $A^\perp$ 是 E 的闭线性子空间.

我们知道, $A^\perp$ 是 E 的一个线性子空间. 而在另一方面, 对于任意的 $x\in E$, 以 F_x 记所有满足 $(x|y)=0$ 的 $y\in E$ 构成的集合. 那么根据 1.5.9(iii), F_x 是闭的, 所以 $A^\perp=\bigcap\limits_{x\in A}F_x$ 是闭的.

1.5.12　考虑 1.3.5 中的空间 E, 它是 ℓ^2 的一个准 Hilbert 子空间. 现在我们来证明 E 在 ℓ^2 中**稠密** (因为与此同时 $E\neq\ell^2$, 从而它不是闭的). 设 $(\lambda_n)\in\ell^2$ 而 $\varepsilon>0$. 存在整数 N 使得

$$\sum_{n\geqslant N}|\lambda_n|^2\leqslant\varepsilon.$$

设 (μ_n) 是 E 中元素, 满足: 对于 $n<N$, $\mu_n=\lambda_n$; 对于 $n\geqslant N$, $\mu_n=0$. 那么

$$\|(\lambda_n)-(\mu_n)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n-\mu_n|^2=\sum_{n\geqslant N}|\lambda_n|^2\leqslant\varepsilon,$$

由此得到结论.

同理, 1.3.6 中的准 Hilbert 空间是 $\ell^2(I)$ 的稠密线性子空间.

1.5.13 在积分理论中我们知道 1.3.7 中的空间 E 在 $L^2(\Delta)$ 中稠密, 更一般地, 1.3.8 中的空间 E 在 $L^2(X, \mu)$ 中稠密.

1.5.14 定理. 设 E 是一个内积空间, F 是 E 的一个线性子空间, 那么 F 的闭包 $\overline{F}$ 是 E 的线性子空间.

设 $x, y \in \overline{F}$. 存在 F 中的序列 (x_n), (y_n) 使得 $x_n \to x$, $y_n \to y$. 这样 $x_n + y_n \in F$, $x_n + y_n \to x + y$ (1.5.9(i)), 所以 $x + y \in \overline{F}$. 同理, 若 $x \in \overline{F}$ 而 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有 $\lambda x \in \overline{F}$.

1.5.15 定理. 设 E 是一个内积空间, $A \subset E$. 设 B 是 A 中元素的线性组合全体而 C 是 B 在 E 中的闭包. 那么 C 是包含 A 的最小的线性闭子空间.

我们知道 B 是 E 的一个包含 A 的线性子空间, 因此 C 也是 E 的一个包含 A 的线性子空间 (参见 1.5.14). 设 F 是 E 的一个包含 A 的闭线性子空间. 那么因为 F 是一个线性子空间, $B \subset F$, 所以由于 F 是闭的, 我们得到 $C \subset F$.

1.5.16 定义. 利用 1.5.15 中的记号, 我们称 C 是由 A 生成的 E 的闭线性子空间. 若 $C = E$, 我们称 A 在 E 中是完全 (total) 的.

1.6 Hilbert 空间

1.6.1 定义. 我们称一个完备的内积空间为一个 **Hilbert 空间**.

设 E 是一个内积空间. 所谓 E 是完备的, 也就是说 E 中任意 Cauchy 序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ (即当 $p, q \to +\infty$ 时 $\|x_p - x_q\| \to 0$) 都收敛于 E 中的一个元素.

1.6.2 例. 任意有限维内积空间都是 Hilbert 空间 (参阅 1.5.6).

1.6.3 例. 设 I 是一个集合. 我们来证明 $\ell^2(I)$ 是一个 Hilbert 空间. 对于 $n = 1, 2, \cdots$, 设 $x_n \in \ell^2(I)$. 我们有 $x_n = (\lambda_{ni})_{i \in I}$, 满足 $\sum\limits_{i \in I} |\lambda_{ni}|^2 < +\infty$. 假设当 $p, q \to +\infty$ 时 $\|x_p - x_q\| \to 0$, 我们来证明 (x_n) 收敛于 $\ell^2(I)$ 中的一个元素. 这时我们有

$$\sum_{i \in I} |\lambda_{pi} - \lambda_{qi}|^2 \to 0.$$

这样, 对于 I 中固定的元素 i, 当 $p, q \to +\infty$ 时 $|\lambda_{pi} - \lambda_{qi}| \to 0$, 所以当 $n \to +\infty$ 时, (λ_{ni}) 收敛于一个复数 λ_i. 设 $\varepsilon > 0$, 存在整数 N 使得

$$p, q \geqslant N \Rightarrow \sum_{i \in I} |\lambda_{pi} - \lambda_{qi}|^2 \leqslant \varepsilon.$$

设 J 是 I 的有限子集, 我们有

$$p, q \geqslant N \Rightarrow \sum_{i \in J} |\lambda_{pi} - \lambda_{qi}|^2 \leqslant \varepsilon.$$

固定 $p \geqslant N$, 假设 $q \to +\infty$, 我们得到

$$p \geqslant N \Rightarrow \sum_{i \in J} |\lambda_{pi} - \lambda_i|^2 \leqslant \varepsilon.$$

这一不等式对于 I 中任意有限子集 J 都成立, 我们得到

$$p \geqslant N \Rightarrow \sum_{i \in I} |\lambda_{pi} - \lambda_i|^2 \leqslant \varepsilon. \tag{14}$$

这就证明了对于 $p \geqslant N$, 族 $(\lambda_{pi} - \lambda_i)_{i \in I}$ 是 $\ell^2(I)$ 中元素. 因为 $\lambda_i = \lambda_{pi} - (\lambda_{pi} - \lambda_i)$, 我们得到 $(\lambda_i)_{i \in I}$ 是 $\ell^2(I)$ 的一个元素, 记作 x. 于是关系式 (14) 就可以写作

$$p \geqslant N \Rightarrow \|x_p - x\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

这样, 当 $p \to +\infty$ 时 $x_p \to x$. 这就证明了 $\ell^2(I)$ 是一个 Hilbert 空间; 例如 ℓ^2 就是一个 Hilbert 空间.

我们将看到 (1.7.12), 任意 Hilbert 空间都和某个 $\ell^2(I)$ 同构.

1.6.4 例. 在积分论中我们可以证明 $L^2(X, \mu)$ 是一个 Hilbert 空间 (这是 1.6.3 的推广). 例如, $L^2(\Delta)$ 是一个 Hilbert 空间 (Fischer-Riesz 定理). 如果我们用 Riemann 积分而不是用 Lebesgue 积分定义 $L^2(\Delta)$, 这一结论就不再成立.

1.6.5 设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的线性子空间. 那么 F 是一个内积空间. F 是 Hilbert 空间当且仅当 F 在 E 中是闭的.

1.6.6 例如, 根据 1.5.12 和 1.5.13, 在 1.3.5, 1.3.6 和 1.3.7 中考虑的准 Hilbert 空间就不是 Hilbert 空间.

1.6.7 如果 E 是一个度量空间, E' 是 E 的子集而 $x \in E$, 那么我们把 $\inf\limits_{y \in E'} d(x, y)$ 称作 x 到 E' 的距离 (这里 d 是 E 上的距离).

定理 (F. Riesz). *设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个闭线性子空间, x 是 E 中元素, δ 是 x 到 F 的距离. 那么*

(i) *存在唯一的 $y \in F$ 使得 $\|x - y\| = \delta$;*

(ii) *y 是 F 中唯一使得 $x - y \in F^{\perp}$ 的元素.*

a) 存在 F 中序列 (y_n) 使得 $\|x - y_n\| \to \delta$. 设 $\varepsilon > 0$, 存在整数 N 使得

$$n \geqslant N \Rightarrow \|x - y_n\|^2 \leqslant \delta^2 + \varepsilon.$$

对于 $m, n \geqslant N$, 我们有

$$2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 \leqslant 4\delta^2 + 4\varepsilon.$$

对左边应用对角线恒等式, 我们得到

$$\|2x - y_m - y_n\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 \leqslant 4\delta^2 + 4\varepsilon,$$

即

$$\|y_m - y_n\|^2 \leqslant 4\delta^2 + 4\varepsilon - 4\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2.$$

但 $\frac{y_m + y_n}{2} \in F$, 所以 $4\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2 \geqslant 4\delta^2$, 即

$$\|y_m - y_n\|^2 \leqslant 4\varepsilon.$$

因为 F 是 Hilbert 空间, 序列 (y_n) 收敛到 F 中的一个元素 y. 因为 $\|x-y_n\| \to \|x-y\|$, 我们有 $\|x - y\| = \delta$.

b) 设 $z \in F$, 对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\|x - y\|^2 \leqslant \|x - (y + \lambda z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 - 2\mathrm{Re}(x - y|\lambda z),$$

即

$$0 \leqslant \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda\mathrm{Re}(x - y|z).$$

这就要求 $\mathrm{Re}(x - y|z) = 0$. 把 z 换成 $\mathrm{i}z$, 我们就得到 $(x - y|z) = 0$. 换句话说, $x - y \in F^{\perp}$.

c) 设 y' 是 F 中不同于 y 的一个元素. 那么因为 $y - y' \in F$, $x - y$ 和 $y - y'$ 垂直. 根据勾股定理, 我们有

$$\|x - y'\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - y'\|^2 > \|x - y\|^2 = \delta^2.$$

这就证明了结论 (i) 中的唯一性. 此外, $x - y'$ 和 F 不垂直, 因为

$$(x - y'|y - y') = (x - y|y - y') + (y - y'|y - y') = \|y - y'\|^2 \neq 0. \tag{15}$$

这就证明了结论 (ii) 中的唯一性.

1.6.8 利用 1.6.7 中的记号, 我们称 y **是** x **在** F **上的投影**, **记作** $y = P_F x$.

1.6.9 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个闭线性子空间. 则*

(i) F 和 $F^{\perp}$ 是 E 中互补的两个闭线性子空间;

(ii) P_F 是 E 的自同态, 以 F 为像, 以 $F^{\perp}$ 为核;

(iii) F 是满足 $P_F x = x$ 的 $x \in E$ 全体构成的集合;

(iv) 对于任意的 $x \in E$, 我们有 $\|P_F x\| \leqslant \|x\|$;

(v) 我们有 $P_F + P_{F^{\perp}} = 1$.

(i) 由假设, F 是 E 的一个闭线性子空间. 根据 1.5.11, $F^{\perp}$ 是 E 的一个闭线性子空间. 若 $x \in F \cap F^{\perp}$, 我们有 $(x|x) = 0$, 因此 $x = 0$; 所以 $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. 设 $y \in E$. 我们有 (根据 1.6.7) $P_F y \in F$ 而 $y - P_F y \in F^{\perp}$, 因此 $y = P_F y + (y - P_F y) \in F + F^{\perp}$; 所以 $F + F^{\perp} = E$.

(ii) 和 (iii) 对于任意的 $y \in E$, 我们有 $y = P_F y + y'$, 其中 $y' \in F^\perp$, 所以 $P_F y$ 是 y 在 F 上平行于 $F^\perp$ 的投影 (依线性代数的意义). 在这些条件下, (ii) 和 (iii) 都是熟知的性质.

(iv) 利用前述符号, 我们有

$$\|y\|^2 = \|P_F y + y'\|^2 = \|P_F y\|^2 + \|y'\|^2 \geqslant \|P_F y\|^2,$$

即得 (iv).

(v) 设 $y \in E$, $y_1 = P_F y$, $y_2 = y - y_1$. 我们有 $y_2 \in F^\perp$, 而 $y - y_2 = y_1$ 和 $F^\perp$ 是垂直的, 因此 $y_2 = P_{F^\perp} y$. 这样, $y = y_1 + y_2 = P_F y + P_{F^\perp} y$, 即 $1 = P_F + P_{F^\perp}$.

1.6.10 推论. 设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个闭线性子空间. 我们有 $(F^\perp)^\perp = F$.

我们有 $P_F + P_{F^\perp} = 1$, $P_{F^\perp} + P_{F^{\perp\perp}} = 1$, 所以 $P_F = P_{F^{\perp\perp}}$, 即知 $F = \operatorname{Im} P_F = \operatorname{Im} P_{F^{\perp\perp}} = (F^\perp)^\perp$.

1.6.11 推论 1.6.10 在我们只假设 E 是内积空间的时候是不成立的 (留作习题).

1.6.12 设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个闭线性子空间. F **在** E **中的正交补** $F^\perp$ **也记作** $E \ominus F$.

我们称 P_F 是 E **在** F **上的投影**.

1.6.13 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, A 是 E 的一个子集. 那么下述条件是等价的:

(i) A 在 E 中是完全的;

(ii) 0 是 E 中唯一和 A 正交的元素.

设 B 是 E 的由 A 生成的子空间, C 是 B 在 E 中的闭包. 我们有

$$\begin{aligned} A \text{ 在 } E \text{ 中是完全的} &\Leftrightarrow C = E \\ &\Leftrightarrow C^\perp = \{0\} \quad (\text{根据 } 1.6.10) \\ &\Leftrightarrow B^\perp = 0 \quad (\text{根据 } 1.5.9(\text{iii})) \\ &\Leftrightarrow A^\perp = 0 \quad (\text{根据 } 1.2.6). \end{aligned}$$

1.7 标准正交族

1.7.1 设 E 是一个准 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 中一族元素. 如果对于 $i \neq j$, 有 $(e_i|e_j) = 0$, 那么我们称这是一个**正交族**. 如果我们还有对于任意的 $i \in I$, $\|e_i\| = 1$, 那么称它是一个**标准正交族**.

E 的一个子集 A 称为标准正交的, 若对于 A 中任意两个不同的元素 x, y, 有 $(x|y)=0$, 且对于任意的 $x\in A$, $\|x\|=1$.

1.7.2 例. 对于具有典范数量积的 $\mathbb{C}^n$, 它的典范基是标准正交的.

在 ℓ^2 中, 以 e_p 记满足 $\lambda_p=1$ 而当 $q\neq p$ 时 $\lambda_q=0$ 的元素 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$. 那么 $(e_1,e_2,\cdots)$ 是一个标准正交族.

更一般地, 在 $\ell^2(I)$ 中, 对于任意的 $i\in I$, 定义 e_i 为满足 $\lambda_i=1$ 而当 $j\neq i$ 时 $\lambda_j=0$ 的元素 $(\lambda_j)_{j\in I}$. 那么 $(e_i)_{i\in I}$ 是一个标准正交族.

1.7.3 例. 在 $L^2(\Delta)$ 中, 古典分析里有好几种有用的标准正交族. 例如, 对于任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 设 e_n 是由 $e_n(t)=\mathrm{e}^{2i\pi nt}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 定义的函数. 那么 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的标准正交族.

1.7.4 定理. 设 E 是一个准 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 中一个标准正交族. 那么 $(e_i)_{i\in I}$ 是线性独立的[①].

设 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 是一族只有有限项非零的复数, 并设 $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i=0$. 我们要来证明对于任意的 $j\in I$ 都有 $\lambda_j=0$. 事实上, 我们有

$$0=\left(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\middle| e_j\right)=\sum_{i\in I}\lambda_i(e_i|e_j)=\lambda_j(e_j|e_j)=\lambda_j.$$

1.7.5 根据 1.7.2 和 1.7.4, 当 I 无限时 $\ell^2(I)$ 是一个无限维线性空间. 反之, 当 I 是有 n 个元素的有限集的时候, (由 1.3.10) $\ell^2(I)$ 和 $\mathbb{C}^n$ 同构, 因此维数为 n.

1.7.6 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(x_i)_{i\in I}$ 是 E 中一个标准正交族.

(i) 族 $(x_i)_{i\in I}$ 可和, 当且仅当

$$\sum_{i\in I}\|x_i\|^2<+\infty;$$

(ii) 如果上式成立, 那么

$$\left\|\sum_{i\in I}x_i\right\|^2=\sum_{i\in I}\|x_i\|^2.$$

对 I 的任意有限子集 J, 定义 $x_J=\sum\limits_{i\in J}x_i$. 为使族 $(x_i)_{i\in I}$ 是可和的, 必须且只需满足下述条件: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 I 的有限子集 J, 使得对于 I 的任意与 J 不交的有限子集 K, 我们有 $\|x_K\|\leqslant\varepsilon$. 另一方面, 为使得 $\sum\limits_{i\in I}\|x_i\|^2<+\infty$, 必须且只需

---

①译者注: 此处原文直译为 “那么 $(e_i)_{i\in I}$ 是一个自由族”.

下述条件得到满足: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J, 使得对于 I 的任意与 J 不交的有限子集 K, 我们有 $\sum_{i\in K}\|x_i\|^2 \leqslant \varepsilon$. 因为 $\|x_K\|^2 = \sum_{i\in K}\|x_i\|^2$, (i) 得证.

假设条件 (i) 成立, 定义 $x = \sum_{i\in I} x_i$. 设 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J 使得 $\|x - x_J\| \leqslant \varepsilon$, 因此有

$$|\|x\| - \|x_J\|| \leqslant \varepsilon,$$

即

$$|\|x\|^2 - \|x_J\|^2| \leqslant \varepsilon(\|x\| + \|x_J\|) \leqslant \varepsilon(2\|x\| + \varepsilon).$$

不断地增大 J, 我们可以假设

$$\sum_{i\in I\setminus J}\|x_i\|^2 \leqslant \varepsilon,$$

即

$$\left|\|x\|^2 - \sum_{i\in I}\|x_i\|^2\right| \leqslant |\|x\|^2 - \|x_J\|^2| + \sum_{i\in I\setminus J}\|x_i\|^2 \leqslant \varepsilon(2\|x\| + \varepsilon) + \varepsilon.$$

由此 (ii) 得证.

1.7.7 设 E 是一个 Hilbert 空间. E 中的标准正交族 $(e_i)_{i\in I}$ 称作一个**标准正交基**, 如果它是完全的 (换句话说, 根据 1.6.13, E 中唯一和所有 e_i 正交的元素是 0).

关于 "基" 这个词的用法, 参阅 1.7.14.

1.7.8 例. 对于 $\ell^2(I)$, 我们在 1.7.2 中定义了它的一个标准正交族 $(e_i)_{i\in I}$. 考虑到 1.5.12, 这是 $\ell^2(I)$ 的一个标准正交基. 我们称之为 $\ell^2(I)$ 的**典范标准正交基**. 特别地, 在 ℓ^2 中, 1.7.2 里我们定义的序列 $(e_1, e_2, \cdots)$ 是 ℓ^2 的典范标准正交基.

在 $L^2([0,1])$ 中, 1.7.3 里考虑的族 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个标准正交基. 事实上, 根据 Stone-Weierstrass 定理, $[0,1]$ 上任意的连续复值函数是 e_n 的线性组合的一致极限; 只要应用 1.5.13 即得结论.

1.7.9 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间. 那么 E 具有标准正交基.*

更精确地说, 我们有下述结论:

1.7.10 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, A 是 E 的标准正交子集. 那么存在 E 的标准正交子集 $B \supset A$, 使得 B 是一个标准正交基.*

考虑 E 中所有包含 A 的标准正交子集. 设 $\mathscr{M}$ 是这些子集全体构成的集合. 在 $\mathscr{M}$ 上依包含关系建立一个偏序. 设 (A_λ) 是 $\mathscr{M}$ 的一个全序子集, 那么存在 $\mathscr{M}$ 中的一个元素包含所有的 A_λ, 其实, 取全体 A_λ 的并集 A' 即可: 事实上, A' 的任意元素都包含在某个 A_λ 中, 因此模长为 1; 如果 x 和 y 是 A' 中两个不同元素, 那么存在 λ 和 μ 使得 $x \in A_\lambda$ 而 $y \in A_\mu$; 如果我们有 $A_\lambda \subset A_\mu$, 那么 $x \in A_\mu$ 且 $y \in A_\mu$, 这样 x 和 y 就是正交的.

所以我们可以对 $\mathscr{M}$ 应用 Zorn 引理. 设 B 是 $\mathscr{M}$ 中的一个极大元. 那么 B 是 E 中包含 A 的一个标准正交子集. 我们来证明 B 是 E 的一个标准正交基. 用反证法, 假设存在非零元 $x \in E$ 和 B 正交. 那么 $B \cup \{\|x\|^{-1}x\}$ 就是 $\mathscr{M}$ 中一个真包含 B 的元素. 这就和 B 的极大性相矛盾了.

1.7.11　定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基.

(i) 设 $(\mu_i)_{i\in I}$ 是一族满足

$$\sum_{i\in I} |\mu_i|^2 < +\infty$$

的复数. 那么族 $(\mu_i e_i)_{i\in I}$ 是可和的; 以 y 记其和. 对于任意的 $i \in I$ 我们有 $(y|e_i) = \mu_i$.

(ii) 设 $x \in E$. 记 $\lambda_i = (x|e_i)$. 那么

$$\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 = \|x\|^2.$$

族 $(\lambda_i e_i)_{i\in I}$ 是可和的, 且其和为 x.

(i) 设 $(\mu_i)_{i\in I}$ 是一族复数, 满足

$$\sum_{i\in I} |\mu_i|^2 < +\infty.$$

(根据 1.7.6) 族 $(\mu_i e_i)_{i\in I}$ 是可和的; 以 y 记其和. 设 $i \in I$, 我们来证明 $(y|e_i) = \mu_i$. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 I 的有限子集 K, 使得对于满足 $K \subset J \subset I$ 的有限集 J, 我们有

$$\left\| y - \sum_{j\in I} \mu_j e_j \right\| \leqslant \varepsilon.$$

我们可以取 $J = K \cup \{i\}$. 那么

$$\left(\sum_{j\in J} \mu_j e_j \middle| e_i \right) = (\mu_i e_i | e_i) = \mu_i,$$

因此

$$\varepsilon \geqslant \left\| y - \sum_{j\in J} \mu_j e_j \right\| \geqslant \left(y - \sum_{j\in J} \mu_j e_j \middle| e_i \right) = |(y|e_i) - \mu_i|.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们自然有 $(y|e_i) = \mu_i$.

(ii) 设 $x \in E$. 记 $\lambda_i = (x|e_i)$. 设 J 是 I 的有限子集, 并定义

$$x_J = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j, \quad x'_J = x - x_J.$$

对于 $i \in J$, 我们有

$$(x'_J|e_i) = (x|e_i) - \left(\sum_{j\in J} \lambda_j e_j \middle| e_i\right) = \lambda_i - \lambda_i = 0;$$

因此 x'_J 和 x_J 正交. 勾股定理给出

$$\|x\|^2 = \|x_J + x'_J\|^2 = \|x_J\|^2 + \|x'_J\|^2 \geqslant \|x_J\|^2 = \sum_{j\in J} |\lambda_j|^2.$$

这就证明了

$$\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < +\infty.$$

由 1.7.6 知, 族 $(\lambda_i e_i)$ 是可和的; 以 y 记其和. 根据 (i), 对于任意的 i, 我们有

$$(y|e_i) = \lambda_i = (x|e_i).$$

我们得到 $x - y$ 和任意的 e_i 正交, 因此为 0, 由此可知

$$x = y = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

利用 1.7.6 (ii), 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2.$$

1.7.12 推论. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基. 对于任意的 $(\mu_i) \in \ell^2(I)$, 以 $f((\mu_i))$ 记 E 中元素

$$\sum_{i\in I} \mu_i e_i.$$

那么 f 是由 Hilbert 空间 $\ell^2(I)$ 到 Hilbert 空间 E 的同构映射. 它把 $\ell^2(I)$ 的典范标准正交基映到 E 的标准正交基 (e_i).

对任意的 $x \in E$, 我们把它对应到 $\ell^2(I)$ 的元素——族 $((x|e_i))_{i\in I}$; 这样就定义了一个从 E 到 $\ell^2(I)$ 的映射 g. 根据 1.7.11, 我们有

$$f \circ g = \mathrm{id}_E; \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\ell^2(I)}.$$

因此 f 和 g 是互逆双射. 显然它们是线性的. 根据 1.7.11, 它们保持范数不变, 因此 (根据 1.1.6) 也保持数量积不变. 显然若以 (e'_i) 来表示 $\ell^2(I)$ 的典范标准正交基, 我们就有 $f(e'_i) = e_i$.

1.7.13 推论 (Plancherel 公式). *设 E 是一个 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基. 若 $x, y \in E$, 数族 $((x|e_i)\overline{(y|e_i)})_{i\in I}$ 可和, 且*

$$(x|y) = \sum_{i\in I}(x|e_i)\overline{(y|e_i)}.$$

这一点由 1.7.12 和 1.3.10 即可得到.

1.7.14 设 E 是一个具有有限维数 n 的 Hilbert 空间. 设 B 是 E 的一个标准正交基. 那么 (根据 1.7.4) B 是一个线性无关族, 因此具有至多 n 个元素. (根据 1.7.11) E 的任意元素都是 B 的元素的线性组合. 这样 B 就是 E 在通常的代数意义下的基.

然而, 当 E 是无限维 Hilbert 空间时, 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基. (根据 1.7.4) $(e_i)_{i\in I}$ 是一个线性无关族这一点仍然成立. 但 $(e_i)_{i\in I}$ 不是一个通常的代数意义上的基. 事实上, 根据 1.7.12, 我们可以假设 $E = \ell^2(I)$ 且 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\ell^2(I)$ 的典范标准正交基; 而 (根据 1.7.5) I 是无限集, 因此并不是 $\ell^2(I)$ 的所有元素都可以表示成 e_i 的线性组合的.

对于 E 用 "标准正交基" 这个说法是有一些危险的, 因为根据线性代数中的一个定理, E 也具有所谓 "代数基" ①; 但是在无限维的情形, 后者是极端病态的, 我们不会用到它们.

1.7.15 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基. 对于任意的 $x \in E$, 由 $\lambda_i = (x|e_i)$ 构成的数族称为 **x 关于 $(e_i)_{i\in I}$ 的坐标**. 若 E 是有限维的, 则根据 1.7.11 和 1.7.14, 这一概念和通常的代数术语是一致的. 当 E 是无限维时, 这两者是不一致的, 但这对我们来说并不会有任何不便.

根据 1.7.11(i), 存在 I 的可数②子集 J, 使得当 $i \notin J$ 时, $\lambda_i = 0$.

1.8 Hilbert 维数

1.8.1 引理. *设 E 是 Hilbert 空间, B 和 C 是 E 的子集. 我们设 B 是一个标准正交基, 而 C 在 E 中是完全的. 那么 $\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathrm{Card}(C)$.*

a) 设 C 有限. 设 E' 是 E 的由 C 生成的线性子空间. 那么根据 1.5.10, E' 在 E 中是闭的, 且因为 C 是完全的, E' 在 E 中稠密. 因此 $E' = E$, 这样 E 具有有限维数 n, 且 C 是 E 的一个生成集合. 这样根据 1.7.14, $\mathrm{Card}(C) \geqslant n$, $\mathrm{Card}(B) = n$.

b) 设 C 是无限集. 对任意的 $x \in C$, 设 B_x 是所有满足 $(x|y) \neq 0$ 的 $y \in B$ 构成的集合. 根据 1.7.15, B_x 是可数的. 设 $y \in B$. 因为 C 是完全的, C 不可能和 y 正交;

①译者注: 所谓代数基是指通过线性组合能够生成全空间的一族向量.

②译者注: 一个集合可数是指它和某个有限集或自然数集等势.

因此存在 $x \in C$ 使得 $y \in B_x$. 这样,

$$B = \bigcup_{x \in C} B_x.$$

由此,

$$\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathrm{Card}(C) \cdot \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

因为 C 是无限的, 我们知道

$$\mathrm{Card}(C) = \mathrm{Card}(C) \cdot \mathrm{Card}(\mathbb{N}),$$

由此引理得证.

1.8.2 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $B \subset E$ 和 $C \subset E$ 是标准正交基. 那么 B 和 C 是等势的.

根据 1.8.1, 我们有 $\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathrm{Card}(C)$ 和 $\mathrm{Card}(C) \leqslant \mathrm{Card}(B)$.

1.8.3 定义. 设 E 是一个 Hilbert 空间. E 的任何一个标准正交基的基数称为 E 的 Hilbert 维数.

如果 E 在代数意义上是有限维的, 那么 (根据 1.7.14) E 的 Hilbert 维数和代数维数重合. 当 E 的代数维数无限时这一结论不再成立.

1.8.4 为使两个 Hilbert 空间同构, 必须且只需它们具有相同的 Hilbert 维数. 更具体地说, 设 E 是具有 Hilbert 维数 d 的 Hilbert 空间, 则 E 和 $\ell^2(I)$ 同构, 其中 I 是任何基数为 d 的集合.

这样我们就建立了同构意义下的 Hilbert 空间的完全列表 (至少在我们乐观地假定可以得到基数的完全列表的前提下).

例如, 根据 1.7.8, Hilbert 空间 $L^2([0,1])$ 和 Hilbert 空间 ℓ^2 是同构的.

1.8.5 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间. 下述条件是等价的:

(i) E 和 ℓ^2 同构;

(ii) E 的 Hilbert 维数是 $\aleph_0$;

(iii) E 是无限维的, 且存在 E 的一个可数完全子集;

(iv) E 是无限维的, 且存在 E 的一个可数稠密子集.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): 一个稠密子集显然是完全的.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): 设 E 满足条件 (iii), 并设 d 是 E 的 Hilbert 维数. 因为 E 是无限维的, 我们有 $d \geqslant \aleph_0$; 而根据 1.8.1, 我们有 $d \leqslant \aleph_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 这由 1.8.4 可得.

(i) $\Rightarrow$ (iv): 只需验证 ℓ^2 满足条件 (iv). 一方面 (根据 1.7.5), ℓ^2 是无限维的. 另一方面, 设 A 是由那些对于充分大的 n 满足 $\lambda_n = 0$ 的 $(\lambda_n) \in \ell^2$ 构成的集合. 那

么 (根据 1.5.12) A 在 ℓ^2 中稠密. 以 B_p 记那些满足对于 $n \leqslant p$ 有 $\lambda_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ 的 $(\lambda_n) \in \ell^2$ 全体构成的集合. 这样 B_p 和 $\mathbb{Q}^{2p}$ 等势, 因而是可数的, 所以

$$B = \bigcup_{p \geqslant 1} B_p$$

是可数的. 另一方面, 显然 B 在 A 中稠密, 因此在 E 中稠密.

1.8.6 我们称一个满足定理 1.8.5 中条件的 Hilbert 空间为**可数型** Hilbert 空间 (有时也称为**可分** Hilbert 空间).

1.9 Hilbert 空间的 Hilbert 和

1.9.1 设 $(E_i)_{i \in I}$ 是一族 Hilbert 空间. 我们将从 E_i 出发构造一个新的 Hilbert 空间 E.

E 的元素是那些族 $(x_i)_{i \in I}$, 其中对于任意的 i, $x_i \in E_i$, 且

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < +\infty.$$

设 $x = (x_i)_{i \in I} \in E$, $y = (y_i)_{i \in I} \in E$. 我们根据对角线恒等式有

$$\|x_i + y_i\|^2 \leqslant 2\|x_i\|^2 + 2\|y_i\|^2,$$

所以 $(x_i + y_i)_{i \in I} \in E$. 我们定义

$$x + y = (x_i + y_i)_{i \in I}.$$

同理, $(\lambda x_i)_{i \in I} \in E$, 我们定义 $\lambda x = (\lambda x_i)_{i \in I}$. 这样我们就在 E 上定义了一个复线性空间结构.

我们有

$$|(x_i|y_i)| \leqslant \|x_i\|\|y_i\| \leqslant \frac{1}{2}(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2),$$

因此复数族 $((x_i|y_i))_{i \in I}$ 是可和的. 我们定义

$$(x|y) = \sum_{i \in I} (x_i|y_i).$$

我们容易验证这样就得到了 E 上的一个非退化内积. 现在来证明 E 是一个 Hilbert 空间.

对于 $n = 1, 2, \cdots$, 设 $x_n \in E$. 记 $x_n = (x_{ni})_{i \in I}$, 我们有

$$\sum_{i \in I} \|x_{ni}\|^2 < +\infty.$$

假设 $p, q \to +\infty$ 时有 $\|x_p - x_q\| \to 0$, 我们来证明 (x_n) 收敛于 E 中的一个元素. 当 $p, q \to +\infty$ 时我们有

$$\sum_{i\in I} \|x_{pi} - x_{qi}\|^2 \to 0.$$

这样, 固定 I 中元素 i, 在 $p, q \to +\infty$ 时我们就有 $\|x_{pi} - x_{qi}\| \to 0$, 因此当 $n \to +\infty$ 时 (x_{ni}) 就收敛于 E_i 中的某个元素 x_i. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 N 使得

$$p, q \geqslant N \Rightarrow \sum_{i\in I} \|x_{pi} - x_{qi}\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

设 J 是 I 的有限子集. 我们有

$$p, q \geqslant N \Rightarrow \sum_{i\in J} \|x_{pi} - x_{qi}\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

固定 $p \geqslant N$, 并假设 $q \to +\infty$. 我们得到

$$p \geqslant N \Rightarrow \sum_{i\in J} \|x_{pi} - x_i\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

这一不等式对于 I 的任意子集 J 都成立, 由此我们得到

$$p \geqslant N \Rightarrow \sum_{i\in I} \|x_{pi} - x_i\|^2 \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

这首先表明 $(x_{pi} - x_i)_{i\in I} \in E$. 因为 $x_i = x_{pi} - (x_{pi} - x_i)$, 我们得到, $(x_i)_{i\in I}$ 是 E 中元素. 关系式 (16) 就可以写作

$$p \geqslant N \Rightarrow \|x_p - x\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

这样, 当 $p \to +\infty$ 时 $x_p \to x$. 这就证明了 E 是一个 Hilbert 空间.

1.9.2 定义. 我们称 E 是 E_i 的外 Hilbert 和, 并记

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i.$$

当 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时, 我们也可以把 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 写作 $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.

1.9.3 1.9.1 的证明是根据 1.6.3 的证明略作修改得到的. 此外, 若对于任意的 i, E_i 都是具备典范数量积的 $\mathbb{C}$ 的话, 则 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 就是 $\ell^2(I)$.

1.9.4 对任意的 $z \in E_i$, 我们对应 E 中的元素 (x_j): $x_i = z$, 而当 $j \neq i$ 时 $x_j = 0$. 这样就定义了一个从 E_i 到 E 的映射 f_i. 立即可以得到 f_i 是从 E_i 到 E 的某个完备 (因此是闭的) 线性子空间的同构映射. 我们称 f_i 是**从 E_i 到 E 的典范映射**, 通常我们把 E_i 和 $f_i(E_i)$ 通过 f_i 等同起来. 在此意义下, 当 $i \neq j$ 时, E_i 和 E_j 在 E 中是正交的.

E_i 的代数直和是满足只有有限项非零的 $(x_i)_{i\in I} \in E$ 全体 (当 I 有限时, 这个代数直和与 E 等同). 设 $x = (x_i)_{i\in I} \in E$. 每个 x_i 都和 E 的一个元素等同, 我们将会看到这些元素构成一个可和族, 其和为 x; 事实上, 对于 I 的任意有限子集 J, 定义

$$x_J = \sum_{i\in J} x_i;$$

存在 I 的有限子集 J_0, 使得

$$\sum_{i\in I\setminus J_0} \|x_i\|^2 \leqslant \varepsilon;$$

如果 J 是 I 中包含 J_0 的有限子集, $x - x_J$ 就是对于 $i \in J$ 满足 $y_i = 0$, 对于 $i \in I \setminus J$ 满足 $y_i = x_i$ 的族 $(y_i)_{i\in I}$, 因此

$$\|x - x_J\|^2 = \sum_{i\in I\setminus J} \|x_i\|^2 \leqslant \varepsilon;$$

这就证明了结论.

由此知道 E_i 的代数直和在 E 中稠密. 因此 E_i 的并集在 E 中是完全的.

1.9.5 仍然设 $x = (x_i)_{i\in I} \in E$. 若 $j \in I$, 则

$$x_j = P_{E_j} x.$$

事实上, 对于 $i \neq j$ 定义 $y_i = x_i$, 并定义 $y_j = 0$. 我们有 $y = (y_i)_{i\in I} \in E$, $x = x_j + y$, 而 y 和 E_j 正交, 即得结论.

1.9.6 定义. 设 F 是一个 Hilbert 空间. 设 $(F_i)_{i\in I}$ 是 F 的一族闭线性子空间. 我们称 F 是 F_i 的内 Hilbert 和, 若 F_i 两两正交且 F_i 的并集在 F 中完全.

1.9.7 定理. 设 F 是一个 Hilbert 空间, 且是其闭线性子空间族 $(F_i)_{i\in I}$ 的内 Hilbert 和. 设 $E = \bigoplus_{i\in I} F_i$. 那么存在从 Hilbert 空间 E 到 Hilbert 空间 F 的唯一同构映射 f, 使得对于任意的 $i \in I$, $f|_{F_i}$ 是 F_i 上的恒等映射.

设 $x = (x_i)_{i\in I} \in E$. 根据 1.7.6, 族 $(x_i)_{i\in I}$ 在 F 中是可和的, 且若记其和为 $f(x)$, 我们有

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

立即可得 f 是 E 到 F 的同态映射. 因为对于任意的 $x \in E$ 都有 $\|f(x)\| = \|x\|$, f 是单射; 于是 $f(E)$ 是 F 的一个完备线性子空间, 因此是闭的. 显然 $f|_{F_i}$ 是 F_i 上的恒等映射. 因此 $f(E)$ 包含了 F_i 的代数直和, 而后者在 F 中稠密. 由此我们得到 $f(E) = F$. 根据 1.1.6, f 是 E 到 F 的同构映射.

设 f' 是对于任意的 i, 满足 $f'|_{F_i} = \mathrm{id}_{F_i}$ 的从 E 到 F 的同构映射. 由线性性, f' 和 f 在 $\sum_{i\in I} F_i$ 上重合, 因此由连续性也在 E 上重合.

1.9.8 由此可见, 外 Hilbert 和与内 Hilbert 和之间并没有本质区别. 在 1.9.7 的条件下, 我们通常就利用 f 把 E 和 F 等同起来, 而不做区分地称之为 “ Hilbert 和”.

1.10 一个内积空间的完备化

1.10.1 我们已经看到了好几个内积空间嵌入为 Hilbert 空间的稠密线性子空间的例子. 我们将看到一般情况下这也是成立的. 我们将利用一个 “完备化” 的构造, 相信一部分读者在度量空间理论中已经接触过; 不过我们还是会给出一个足够详细的证明.

1.10.2 设 E 是一个内积空间. 所谓 E 中的 Cauchy 序列是指 E 中满足当 m, $n \to +\infty$ 时 $\|x_m - x_n\| \to 0$ 的序列 $(x_1, x_2, \cdots)$. 设 $\mathcal{C}$ 是 E 中 Cauchy 序列全体. 我们称两个 Cauchy 序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots)$ 等价, 若 $n \to +\infty$ 时 $\|x_n - y_n\| \to 0$. 容易验证, 我们这样就定义了 $\mathcal{C}$ 上的一个等价关系 $\mathcal{R}$. 以 $\widehat{E}$ 记集合 $\mathcal{C}/\mathcal{R}$.

设 $\hat{x} \in \widehat{E}$, $\hat{y} \in \widehat{E}$. 选择 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 的两个代表元 $(x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{C}$, $(y_1, y_2, \cdots) \in \mathcal{C}$. 我们可以验证 $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots) \in \mathcal{C}$, 而且它对应的等价类只与 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 有关, 而并不依赖于具体的代表元. 我们把得到的等价类记作 $\hat{x} + \hat{y}$. 用类似的方法, 我们可以对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 定义元素 $\lambda\hat{x} \in \widehat{E}$. 可以验证, 这样就得到了 $\widehat{E}$ 的一个 $\mathbb{C}$ 上线性空间结构, 其零元素为 $(0, 0, \cdots)$ 对应的等价类.

设 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $(x_1, x_2, \cdots)$, $(y_1, y_2, \cdots)$ 如前. 那么

$$\begin{aligned}|(x_n|y_n) - (x_m|y_m)| &= |(x_n - x_m|y_n) + (x_m|y_n - y_m)| \\ &\leqslant \|x_n - x_m\|\|y_n\| + \|x_m\|\|y_n - y_m\|.\end{aligned}$$

当 $m, n \to +\infty$ 时, 我们有 $\|x_m - x_n\| \to 0$, $\|y_m - y_n\| \to 0$, 且 $\|y_n\|$, $\|x_m\|$ 是有界的; 因此当 $n \to +\infty$ 时数列 $(x_n|y_n)$ 有极限. 我们可以验证这个极限只依赖于 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$, 而和具体的代表元无关. 以 $(\hat{x}|\hat{y})$ 记这个极限. 我们可以验证 $(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto (\hat{x}|\hat{y})$ 是 $\widehat{E}$ 上的一个(半)正定 Hermite 形式. 设 $(\hat{x}|\hat{x}) = 0$. 那么当 $n \to +\infty$ 时, $(x_n|x_n) \to 0$, 所以序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 和序列 $(0, 0, \cdots)$ 等价; 我们就得到 $\hat{x} = 0$, 从而 $\widehat{E}$ 是一个内积空间.

对于任意的 $x \in E$, 我们把它对应到 Cauchy 序列 $(x, x, x, \cdots)$ 对应的 $\widehat{E}$ 中的等价类. 这样就定义了从 E 到 $\widehat{E}$ 的映射 φ. 我们可以验证 φ 是线性空间之间的

同态, 且对于任意的 $x, y \in E$, $(\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y)$. 特别地, 若 $\varphi(x) = 0$, 我们有 $(x|x) = (\varphi(x)|\varphi(x)) = 0$, 因此 $x = 0$, 从而 φ 是单射. 这样今后我们就可以把 E 和 $\widehat{E}$ 的一个线性子空间等同起来, 且具有诱导的准 Hilbert 空间结构.

设 $\hat{x} \in \widehat{E}$, 并设 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是 $\hat{x}$ 的一个代表元. 那么 x_n 在 $\widehat{E}$ 中依范数收敛于 $\hat{x}$. 事实上, 设 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $m, n \geqslant N$ 时 $\|x_m - x_n\| \leqslant \varepsilon$; 而

$$\|\hat{x} - x_n\|^2 = (\hat{x} - x_n|\hat{x} - x_n)$$

是 $(x_m - x_n|x_m - x_n)$ 在 $m \to +\infty$ 的极限; 设 $n \geqslant N$, 我们有

$$\|\hat{x} - x_n\|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

即得结论. 特别地, E 在 $\widehat{E}$ 中稠密.

现在来证明 $\widehat{E}$ 是 Hilbert 空间. 设 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots)$ 是 $\widehat{E}$ 中 Cauchy 序列. 对于任意的 n, 根据上文我们知道存在 $x_n \in E$ 使得

$$\|\hat{x}_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

因为

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - \hat{x}_m\| + \|\hat{x}_m - \hat{x}_n\| + \|\hat{x}_n - x_n\| \leqslant \|\hat{x}_m - \hat{x}_n\| + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

我们得到 $(x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{C}$. 设 $\hat{x}$ 是这一序列在 $\widehat{E}$ 中对应的等价类. 根据前文, 当 $n \to +\infty$ 时, $\|\hat{x} - x_n\| \to 0$. 因为

$$\|\hat{x} - \hat{x}_n\| \leqslant \|\hat{x} - x_n\| + \frac{1}{n},$$

我们有 $\|\hat{x} - \hat{x}_n\| \to 0$, 这样就证明了 $\widehat{E}$ 是完备的.

1.10.3 利用前述记号, 我们称 $\widehat{E}$ 是 E **通过完备化得到的** Hilbert **空间**. 我们知道 E 是 $\widehat{E}$ 的稠密线性子空间. 可以证明 (留作习题), 这一性质在同构的意义下刻画了 $\widehat{E}$ 和从 E 到 $\widehat{E}$ 的典范嵌入.

II Hilbert 空间上的连续线性算子[①]

2.1 连续线性算子的一般性质

2.1.1 设 E, F 是两个内积空间. 设 $u : E \to F$ 是一个线性算子. 设 B 是 E 中单位闭球. 我们定义

$$\|u\| = \sup_{x \in B} \|ux\| \in [0, +\infty]. \tag{1}$$

对于任意的 $y \in E$, 我们有

$$\|uy\| \leqslant \|u\|\|y\|. \tag{2}$$

(我们约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$.) 事实上, 当 $y = 0$ 时 (2) 是显然的. 若 $y \neq 0$, 定义 $x = \|y\|^{-1}y$. 我们有 $y = \|y\|x$, 因此 $uy = \|y\|ux$, 而 $x \in B$, 这样我们就得到

$$\|uy\| = \|y\|\|ux\| \leqslant \|y\|\|u\|.$$

2.1.2 更确切地说, $\|u\|$ 是对于任意的 $y \in E$ 都有

$$\|uy\| \leqslant a\|y\| \tag{3}$$

的最小数 $a \in [0, +\infty]$. 事实上, 如果 a 满足 (3), 那么对于任意 $x \in B$, 我们有 $\|ux\| \leqslant a$, 所以 $\|u\| \leqslant a$.

2.1.3 设 S 是 E 的单位球面. 如果 $E \neq 0$, 那么 B 的任意元素可以写作 λx, 其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 且 $x \in S$, 所以

$$\|u\| = \sup_{x \in S} \|ux\|. \tag{4}$$

[①] 译者注: 从本章开始直到第 V 章, “线性算子” 一词的原文是 “homomorphisme”, 直译为同态, 指的是定义域是全空间的连续线性算子.

2.1.4 定理. 设 E, F 是两个内积空间, $u: E \to F$ 是一个线性算子. 那么下述条件等价:

(i) u 在 0 点连续;

(ii) u 连续;

(iii) $\|u\| < +\infty$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 显然.

(i) $\Rightarrow$ (iii): 设 u 在 0 点连续. 存在 $\eta > 0$, 使得

$$y \in E \text{ 且 } \|y\| \leqslant \eta \Rightarrow \|uy\| \leqslant 1.$$

这样对于 $x \in E$, 我们有

$$\|x\| \leqslant 1 \Rightarrow \|\eta x\| \leqslant \eta \Rightarrow \|u(\eta x)\| \leqslant 1 \Rightarrow \eta\|ux\| \leqslant 1 \Rightarrow \|ux\| \leqslant \eta^{-1},$$

因此 $\|u\| < +\infty$.

(iii)$\Rightarrow$ (ii): 设 $\|u\| < +\infty$. 设 $x_0 \in E$ 且 $\varepsilon > 0$. 我们有

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|u\|} \Rightarrow \|ux - ux_0\| = \|u(x - x_0)\| \leqslant \|u\|\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon.$$

因此 u 在 x_0 连续.

2.1.5 2.1.4 中的条件 (iii) 表示 $u(B)$ 是有界的; 所以我们也把 "有界线性算子" 作为 "连续线性算子" 的同义词.

2.1.6 假设 E 是有限维的, 那么 E 到 F 的任意线性算子 u 都是有界的; 事实上, 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 E 的一组标准正交基, 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$ux = u\left(\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)ue_i,$$

然后只要应用 1.5.9(iii) 即可.

然而, 当 E 是无限维空间时, 一般来说, 存在从 E 到 F 的不连续线性算子 (留作习题).

2.1.7 我们以 $\mathcal{L}(E;F)$ 记由 E 到 F 的连续线性算子全体. 立即可得, 若 u, $v \in \mathcal{L}(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有 $u + v \in \mathcal{L}(E;F)$, $\lambda u \in \mathcal{L}(E;F)$. 因此 $\mathcal{L}(E;F)$ 具有自然的复线性空间结构.

若 $E = F$, 那么我们记 $\mathcal{L}(E;E) = \mathcal{L}(E)$. 我们有时也把映射 id_E 记作 1 或者 I, 它也是 $\mathcal{L}(E)$ 的元素. 对于 $u, v \in \mathcal{L}(E)$, 我们有 $uv \in \mathcal{L}(E)$, 这样 $\mathcal{L}(E)$ 就具有 $\mathbb{C}$ 上代数结构, 并以 I 作为单位元. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E)$ 的元素 λI 经常就直接记作 λ. 设 $u \in \mathcal{L}(E)$, 那么 u^2, u^3, $\cdots$ 都是 $\mathcal{L}(E)$ 的元素; 更一般地, 对任意 $p \in \mathbb{C}[X]$, $p(u)$ 是 $\mathcal{L}(E)$ 中元素.

2.1.8 定理. 设 E, F, G 是内积空间.
(i) 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $[0,+\infty)$ 的映射 $u \mapsto \|u\|$ 是 $\mathcal{L}(E;F)$ 上的一个范数;
(ii) 如果 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 且 $v \in \mathcal{L}(F;G)$, 那么我们有 $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|\|u\|$;
(iii) 若 $E \neq 0$, 则 $\|\mathrm{id}_E\| = 1$.
(i) 设 $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$. 我们有

$$\begin{aligned}
\|u+v\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(u+v)x\| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (\|ux\| + \|vx\|) \\
&\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|ux\| + \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|vx\| \\
&= \|u\| + \|v\|, \\
\|\lambda u\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(\lambda u)x\| \\
&= \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda|\|ux\| = |\lambda|\|u\|.
\end{aligned}$$

最后, 若 $\|u\| = 0$, 根据 (2) 我们知道对于任意的 $y \in E$, 有 $uy = 0$, 因此 $u = 0$.
(ii) 设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(F;G)$. 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$\|(v \circ u)(x)\| \leqslant \|v\|\|ux\| \leqslant \|v\|\|u\|\|x\|,$$

因此根据 2.1.2, $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|\|u\|$.
(iii) 显然.

2.1.9 这样 $\mathcal{L}(E;F)$ 就具有自然的复赋范线性空间的结构, $\mathcal{L}(E)$ 具有自然的复赋范代数结构. 范数以通常的方式给出一个距离, 因此我们得到 $\mathcal{L}(E;F)$ 上的一个拓扑; 这个拓扑称为 $\mathcal{L}(E;F)$ 上的**范数拓扑**. 由 2.1.8 易知,

由 $\mathcal{L}(E;F) \times \mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(E;F)$ 的映射 $(u,v) \mapsto u+v$,
由 $\mathbb{C} \times \mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(E;F)$ 的映射 $(\lambda,u) \mapsto \lambda u$,
由 $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射 $(u,v) \mapsto uv$

都是依范数连续的.

2.1.10 设 E, F 是 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的标准正交基, $(f_j)_{j\in J}$ 是 F 的标准正交基.

对于任意的 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 我们把由

$$\alpha_{ji} = (ue_i|f_j) \tag{5}$$

定义的复矩阵 $M = (\alpha_{ji})_{j\in J, i\in I}$ 称为 u **关于基** $(e_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$ **的矩阵**. 换句话说, M 的指标为 i 的列就是 ue_i 的坐标. (当 $E = F$, $I = J$ 且对于任意的 i 都有 $e_i = f_i$ 时, 我们就说 u **关于基** $(e_i)_{i\in I}$ 的矩阵.)

映射 $u \mapsto M$ 是单射; 也就是说, u 由 M 完全确定. 事实上, 设 $u, u' \in \mathcal{L}(E; F)$ 对于给定的基有相同的矩阵, 那么对于任意的 i, $ue_i = u'e_i$, 因此根据线性性和连续性即得 $u = u'$.

遗憾的是, 一般来说并没有一种办法来刻画映射 $u \mapsto M$ 的像. 也就是说, 给定一个复矩阵 $(\alpha_{ji})_{j\in J, i\in I}$, 没有简单的方法来确定它是否是 $\mathcal{L}(E; F)$ 中某个元素的矩阵. 根据前文, 一个必要条件是对于任意的 $i \in I$, 我们有

$$\sum_{j\in J} |\alpha_{ji}|^2 < +\infty.$$

在下文 2.5.4 中, 我们将看到另一个必要条件: 对于任意的 $j \in J$,

$$\sum_{i\in I} |\alpha_{ji}|^2 < +\infty.$$

但是只满足这两个条件远远不是充分的 (留作习题).

2.1.11 例. 对于集合 I, 设 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 是一个有界复数族, 并定义

$$a = \sup_{i\in I} |\alpha_i|.$$

对任意的 $x = (\lambda_i) \in \ell^2(I)$, 我们有

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i\lambda_i|^2 \leqslant a^2 \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2. \tag{6}$$

因此, 若定义 $ux = (\alpha_i\lambda_i)_{i\in I}$, 那么 $ux \in \ell^2(I)$. 易见 u 是 $\ell^2(I)$ 上的线性算子. 关系式 (5) 可以写作

$$\|ux\|^2 \leqslant a^2\|x\|^2.$$

所以 $u \in \mathcal{L}(\ell^2(I))$, 而且 $\|u\| \leqslant a$.

另一方面, 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\ell^2(I)$ 的典范标准正交基. 那么 ue_i 就是满足当 $j \neq i$ 时 $\lambda_j = 0$ 而 $\lambda_i = \alpha_i$ 的族 $(\lambda_j)_{j\in I}$. 因此 $ue_i = \alpha_i e_i$, 即得 $\|u\| \geqslant |\alpha_i|$. 这样就有 $\|u\| \geqslant a$, 最后得到

$$\|u\| = a. \tag{7}$$

比如, 当 $I = \{1, 2, \cdots\}$ 时, 我们有 $\ell^2(I) = \ell^2$, u 关于 ℓ^2 的典范标准正交基的矩阵就是对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

2.1.12 对于集合 I 和 J, 设 $(\alpha_{ji})_{j\in J,\, i\in I}$ 是满足

$$a=\sum_{j\in J,\, i\in I}|\alpha_{ji}|^2<+\infty$$

的复矩阵. 设 $x=(\lambda_i)_{i\in I}\in\ell^2(I)$. 对于 $j\in J$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|\alpha_{ji}\lambda_i| &\leqslant \left(\sum_{i\in I}|\alpha_{ji}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2\right)^{1/2} \quad (\text{根据 } 1.3.13)\\ &<+\infty,\end{aligned}$$

因此我们可以定义

$$\mu_j=\sum_{i\in I}\alpha_{ji}\lambda_i.$$

同时, 我们也有

$$|\mu_j|^2\leqslant\left(\sum_{i\in I}|\alpha_{ji}|^2\right)\|x\|^2,$$

所以

$$\sum_{j\in J}|\mu_j|^2\leqslant a\|x\|^2. \tag{8}$$

这就证明了 $(\mu_j)_{j\in J}\in\ell^2(J)$. 定义

$$ux=(\mu_j)_{j\in J}.$$

我们就定义了一个从 $\ell^2(I)$ 到 $\ell^2(J)$ 的映射 u, 且它显然是一个线性算子. 另一方面, (8) 可以写作

$$\|ux\|^2\leqslant a\|x\|^2,$$

因此 $u\in\mathcal{L}(\ell^2(I);\ell^2(J))$ 且 $\|u\|\leqslant a^{1/2}$. (一般来说, 我们有 $\|u\|\leqslant a^{1/2}$.)

容易验证, u 关于典范标准正交基的矩阵就是前述矩阵 (α_{ji}).

2.1.13 例. 设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中线段, f 是 Δ 上有界可测复值函数. 设 a 是 $|f|$ 的本性上确界, 即使得

$$|f(t)|\leqslant a$$

在 Δ 上几乎处处成立的最小的数.

对于任意的 $g\in L^2(\Delta)$, 我们有 $fg\in L^2(\Delta)$. 事实上, 我们知道 fg 是可测的, 且

$$\int_\Delta|f(t)g(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\int_\Delta a^2|g(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty. \tag{9}$$

定义 $u_f(g)=fg$. 这样我们就定义了 $L^2(\Delta)$ 上的一个线性算子. 另一方面, (8) 可以写作 $\|u_fg\|\leqslant a\|g\|$, 因此 u_f 是连续的, 且 $\|u_f\|\leqslant a$.

设 $b < a$. 设 T 是由满足 $|f(t)| \geqslant b$ 的 $t \in \Delta$ 全体构成的集合. 根据 a 的定义, T 不是零测度的; 设 g 是 T 的某个具有正测度 $m > 0$ 的可测子集 T' 的特征函数. 我们有 $g \in L^2(\Delta)$, $g \neq 0$,

$$\|g\|^2 = \int_\Delta |g(t)|^2 \ \mathrm{d}t = m,$$
$$\|u_f g\|^2 = \int_\Delta |f(t)g(t)|^2 \ \mathrm{d}t \geqslant \int_\Delta b^2 |g(t)|^2 \ \mathrm{d}t = b^2 m.$$

由此 $\|u_f\| \geqslant b$. 因为 b 是任意的, 我们得到

$$\|u_f\| = a. \tag{10}$$

注意到若 f' 是 Δ 上另一个有界可测复值函数而 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们得到

$$u_{f+f'} = u_f + u_{f'}, \quad u_{\lambda f} = \lambda u_f, \quad u_{ff'} = u_f u_{f'}.$$

我们可以把 2.1.11 和 2.1.13 看作同一个例子 $L^2(X, \mu)$ 的两种特殊情形.

2.1.14 例. 设 Δ, Δ' 是 $\mathbb{R}$ 中线段, 而 K 是 $\Delta \times \Delta'$ 上一个满足

$$a = \int_\Delta \int_{\Delta'} |K(t, t')|^2 \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}t' < +\infty$$

的可测复值函数. 设 $g \in L^2(\Delta)$. 对几乎所有的 $t' \in \Delta'$, 函数 $t \mapsto K(t, t')$ 在 Δ 上是平方可积的, 所以函数 $t \mapsto K(t, t')g(t)$ 在 Δ 上是平方可积的, 我们可以定义

$$h(t') = \int_\Delta K(t, t') g(t) \ \mathrm{d}t.$$

根据积分理论, 这样定义的函数 h 在 Δ' 上是可测的 (它可能在某个零测度集上没有定义, 我们可以在这个集合上取任意值). 我们有

$$|h(t')|^2 \leqslant \left(\int_\Delta |K(t, t')|^2 \ \mathrm{d}t\right) \left(\int_\Delta |g(t)|^2 \ \mathrm{d}t\right) \quad (\text{根据 } 1.3.11)$$
$$= \|g\|^2 \int_\Delta |K(t, t')|^2 \ \mathrm{d}t,$$

因此

$$\int_{\Delta'} |h(t')|^2 \ \mathrm{d}t' \leqslant \|g\|^2 \int_{\Delta'} \int_\Delta |K(t, t')|^2 \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}t' = a\|g\|^2. \tag{11}$$

这首先表明 $h \in L^2(\Delta')$. 我们记 $h = v_K g$. 这样我们就定义了一个从 $L^2(\Delta)$ 到 $L^2(\Delta')$ 的映射 v_K, 它显然是一个线性算子. 另一方面, (11) 可以写作

$$\|v_K g\|^2 \leqslant a\|g\|^2,$$

从而 v_K 连续且 $\|v_K\| \leqslant a^{1/2}$. (一般来说我们有 $\|v_K\| < a^{1/2}$.)

我们可以把 2.1.12 和 2.1.14 看作同一个例子 $L^2(X, \mu)$ 的两种特殊情形.

2.2 关于连续线性算子的若干定理

2.2.1 设 E, F 是内积空间, 而 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 那么核 $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(0)$ 是 E 的一个**闭线性子空间**.

u 的像 $\operatorname{Im} u = u(E)$ 是 F 的线性子空间; 但是即便 E 和 F 都是 Hilbert 空间, $\operatorname{Im} u$ 仍有可能不是闭的. 例如在例 2.1.11 中, 取 $I = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 和 $\alpha_n = 2^{-n}$. 那么 $u(\ell^2)$ 的每一个元素 (μ_n) 都具有 $(2^{-n}\lambda_n)$ 的形式, 其中 $(\lambda_n) \in \ell^2$, 这样当 $n \to +\infty$ 时就有 $\mu_n = O(2^{-n})$. 因此 ℓ^2 的元素 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ 不在 $u(\ell^2)$ 中, 于是 $u(\ell^2) \neq \ell^2$. 但是 $u(2^n e_n) = e_n$, 所以 $u(\ell^2)$ 包含 $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{C} e_n$, 因此 (根据 1.7.12) 在 ℓ^2 中稠密. 从而 $u(\ell^2)$ 在 ℓ^2 中不是闭的.

2.2.2 定理. *设 E 是内积空间, E' 是 E 的稠密线性子空间, F 是 Hilbert 空间, 而 $u \in \mathcal{L}(E';F)$. 存在 u 的唯一的延拓 $v \in \mathcal{L}(E;F)$. 我们有 $\|v\| = \|u\|$.*

(这个定理当 E 是赋范空间而 F 是一个 Banach 空间时仍然成立. 我们将在 5.1.2 中用到这个推广.)

因为 E' 在 E 中稠密, v 的唯一性是显然的. 现在来证明 v 的存在性. 设 $x \in E$. 取 E' 中满足 $\|x_n - x\| \to 0$ 的序列 (x_n). 那么

$$\|ux_m - ux_n\| \leqslant \|u\|\|x_m - x_n\| \to 0.$$

因为 F 是完备的, 序列 (ux_n) 收敛于某个极限 $y \in F$. 这个极限只依赖于 x, 而和 (x_n) 的选择无关: 事实上, 设 (x'_n) 是另一个满足 $\|x'_n - x\| \to 0$ 的序列. 那么我们有 $\|x_n - x'_n\| \to 0$, 从而 $\|ux_n - ux'_n\| \to 0$, 即 $\|ux'_n - y\| \to 0$. 我们记 $y = vx$, 这样就定义了从 E 到 F 的映射 v. 容易验证 v 是一个线性算子. 利用上述记号, 我们有 $\|x_n\| \to \|x\|$, 因此

$$\|vx\| = \|y\| = \lim \|ux_n\| \leqslant \|u\| \lim \|x_n\| = \|u\|\|x\|,$$

因此 v 连续且 $\|v\| \leqslant \|u\|$. 最后当 $x \in E'$, 我们对于任意 n, 取 $x_n = x$, 即得 $vx = y = ux$; 所以 v 是 u 的延拓, 就得到 $\|v\| \geqslant \|u\|$.

2.2.3 定理. *设 E, F 是 Hilbert 空间. 赋范线性空间 $\mathcal{L}(E;F)$ 是完备的.*

(这个定理在 E 是一个赋范线性空间而 F 是一个 Banach 空间的时候也成立.)

设 $(u_1, u_2, \cdots)$ 是 $\mathcal{L}(E;F)$ 中满足当 $m, n \to +\infty$ 时 $\|u_m - u_n\| \to 0$ 的一列元素. 设 $x \in E$, 当 $m, n \to +\infty$ 时我们有

$$\|u_m x - u_n x\| \leqslant \|u_m - u_n\|\|x\| \to 0.$$

因此存在 F 的一个元素 (我们记作 ux), 当 $n \to +\infty$ 时, 满足 $\|u_n x - ux\| \to 0$. 容易验证 u 是从 E 到 F 的一个线性算子. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 N 使得

$$m, n \geqslant N \Rightarrow \|u_m - u_n\| \leqslant \varepsilon.$$

设 $x \in E$ 满足 $\|x\| \leqslant 1$. 我们有

$$m, n \geqslant N \Rightarrow \|u_m x - u_n x\| \leqslant \varepsilon.$$

固定 $n \geqslant N$, 令 m 趋向于 $+\infty$. 我们得到

$$n \geqslant N \Rightarrow \|ux - u_n x\| \leqslant \varepsilon.$$

因为 x 是任意选取的, 我们得到

$$n \geqslant N \Rightarrow \|u - u_n\| \leqslant \varepsilon.$$

这样就证明了 $u - u_n \in \mathcal{L}(E; F)$, 所以 $u \in \mathcal{L}(E; F)$. 我们还得到当 $n \to +\infty$ 时, $\|u - u_n\| \to 0$.

2.2.4　定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $(u_i)_{i \in I}$ 是 $\mathcal{L}(E; F)$ 的一族元素. 我们假设对于任意的 $x \in E$, 数族 $(\|u_i x\|)_{i \in I}$ 是有界的. 那么族 $(\|u_i\|)_{i \in I}$ 是有界的.

(这就是所谓 Banach-Steinhaus 定理, 它在 E 是 Banach 空间而 F 是一个赋范线性空间的时候也是成立的.)

a) 我们做如下假设:

(H) 对于 E 中任意半径大于 0 的闭球 B, 我们有 $\sup\limits_{x \in B,\, i \in I} \|u_i x\| = +\infty$.

设 B 是 E 中半径大于 0 的闭球, 并设 $\alpha \geqslant 0$. 存在一个半径大于 0 的闭球 $B' \subset B$ 和一个 $i \in I$ 使得对于任意的 $x \in B'$ 有 $\|u_i x\| \geqslant \alpha$. (事实上, 根据假设 (H), 存在 $y \in B$ 和 $i \in I$ 使得 $\|u_i y\| > \alpha$; 根据 u_i 的连续性, 我们可以找到一个以 y 为中心的非空开球, 使得在其上有 $\|u_i x\| \geqslant \alpha$; 这个球和 B 的内部之交集是一个非空开集 V; 只需取 B' 为 V 中一个半径大于 0 的闭球即可.)

反复应用这一结果, 我们可以构造一列半径大于 0 的闭球 $(B_0, B_1, B_2, \cdots)$, 在 E 中趋于 0, 和 I 中一列元素 $(i_0, i_1, i_2, \cdots)$, 使得在 B_k 中有 $\|u_{i_k} x\| \geqslant k$.

因为 E 是完备的, 存在一点 z 包含在所有的 B_k 之中. 于是对于任意的 k, 我们有 $\|u_{i_k} z\| \geqslant k$, 这样就和定理的假设矛盾.

b) 所以 (H) 是不成立的. 换句话说, 存在 E 中一个以 x_0 为中心, 半径 $r > 0$ 的闭球 B, 和一个有限数 $M \geqslant 0$, 使得对于任意的 $i \in I$ 和任意的 $y \in B$, 我们都有 $\|u_i y\| \leqslant M$.

设 $x \in E$ 满足 $\|x\| \leqslant 1$. 我们有 $x_0 \in B$, $x_0 + rx \in B$, 因此对于任意的 i,

$$\|u_i x_0\| \leqslant M, \quad \|u_i(x_0 + rx)\| \leqslant M.$$

由此得到

$$\|u_i(rx)\| \leqslant 2M, \quad \|u_i x\| \leqslant 2Mr^{-1}.$$

最后, 对于任意的 $i \in I$, 有 $\|u_i\| \leqslant 2Mr^{-1}$.

2.2.5 定理. 设 E 是内积空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 当 $n \to +\infty$ 时, $\|u^n\|^{1/n}$ 具有极限 $l \leqslant \|u\|$. 更一般地, 对于任意的 n, $l \leqslant \|u^n\|^{1/n}$.

(这个定理对于 E 是一个赋范线性空间的情形仍然是成立的.)

定义 $\rho_n = \|u^n\|$. 所有的结论都来自于 2.1.8(ii) 推出的不等式

$$\rho_{m+n} \leqslant \rho_m \rho_n.$$

若对于充分大的 n 有 $\rho_n = 0$, 则结论显然成立. 假设对于任意的 n 都有 $\rho_n > 0$. 定义

$$l = \limsup_{n\to+\infty} \rho_n^{\frac{1}{n}}, \quad l' = \liminf_{n\to+\infty} \rho_n^{\frac{1}{n}}.$$

只需证明 $l \leqslant \rho_p^{1/p}$ (这可以推出 $l \leqslant l'$, 由此得到 $l = l'$).

固定整数 $p \geqslant 0$. 设 $\alpha = \sup(\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{p-1}) > 0$. 对任意整数 n, 我们记 $n = k_n p + r_n$, 其中 $0 \leqslant r_n < p$. 我们有 $\rho_n \leqslant \rho_p^{k_n} \rho_{r_n}$, 因此

$$\rho_n^{1/n} \leqslant (\rho_p^{1/p})^{k_n p/n} (\rho_{r_n})^{1/n} \leqslant (\rho_p^{1/p})^{k_n p/n} \alpha^{1/n}.$$

当 $n \to +\infty$ 时, 我们有 $\dfrac{k_n p}{n} \to 1$, 而 $\alpha^{1/n} \to 1$, 因为 $\alpha > 0$. 这样我们就得到了极限 $l \leqslant \rho_p^{1/p}$.

现在令 p 趋向于 $+\infty$, 我们就得到 $l \leqslant l'$.

2.2.6 定义. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u^n\|^{1/n}$ 称为 u 的谱半径.

这个术语的意义将在 2.8.10 中解释. 在 2.2.5 中我们还证明了对于所有的 p, $\|u^p\|^{1/p}$ 不会比谱半径小.

2.2.7 定理. 设 $(E_i)_{i\in I}$, $(F_i)_{i\in I}$ 是两族 Hilbert 空间, E 是 E_i 的 Hilbert 和, F 是 F_i 的 Hilbert 和. 对于任意的 $i \in I$, 设 $u_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i)$. 我们假设

$$\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty.$$

那么存在唯一的 $u \in \mathcal{L}(E; F)$, 对于任意的 i 满足 $u|_{E_i} = u_i$. 我们有

$$\|u\| = \sup_{i\in I} \|u_i\|.$$

设 $x \in E$. 我们有 $x = (x_i)_{i \in I}$, 其中 $x_i \in E_i$, 且 $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2$. 这样

$$\sum_{i \in I} \|u_i x_i\|^2 \leqslant \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 \|x_i\|^2 \leqslant \left(\sup_{i \in I} \|u_i\|^2\right) \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 = \left(\sup_{i \in I} \|u_i\|^2\right) \|x\|^2 < +\infty.$$

因此族 $(u_i x_i)$ 就是 F 中的一个元素, 记作 ux. 显然 u 是从 E 到 F 的线性算子. 不仅如此,

$$\|ux\|^2 = \sum_{i \in I} \|u_i x_i\|^2 \leqslant \left(\sup_{i \in I} \|u_i\|^2\right) \|x\|^2,$$

所以 $u \in \mathcal{L}(E; F)$, 且 $\|u\| \leqslant \sup_{i \in I} \|u_i\|$. 我们有 $u|_{E_i} = u_i$. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 $i \in I$ 和 $x \in E_i$ 满足 $\|x\| \leqslant 1$, $\|u_i x\| \geqslant \left(\sup_{i \in I} \|u_i\|^2\right) - \varepsilon$. 这样 $ux = u_i x$, 因此

$$\|u\| \geqslant \left(\sup_{i \in I} \|u_i\|^2\right) - \varepsilon.$$

这样就得到

$$\|u\| = \sup_{i \in I} \|u_i\|.$$

设 $u' \in \mathcal{L}(E; F)$ 满足 $u'|_{E_i} = u_i$, 那么由线性性, u 和 u' 在 $\sum_{i \in I} E_i$ 上重合, 所以由连续性在 E 上重合.

2.2.8　我们称 2.2.7 中定义的 u 为 u_i **的** Hilbert **和, 并记作** $u = \bigoplus_{i \in I} u_i$.

如果对于任意的 $i \in I$ 都有 $E_i = F_i = \mathbb{C}$, 那么我们重又得到例 2.1.11.

2.2.9　如果对于任意的 i, $E_i = F_i$, $u = \bigoplus_{i \in I} u_i$, $v = \bigoplus_{i \in I} v_i$, 那么我们有

$$u + v = \bigoplus_{i \in I} (u_i + v_i),$$
$$uv = \bigoplus_{i \in I} (u_i v_i),$$
$$\lambda u = \bigoplus_{i \in I} (\lambda u_i).$$

这里相应记号的意义是显然的.

2.3　连续线性泛函

2.3.1　设 E 是一个内积空间. E 上的一个线性泛函[①] f 是从 E 到 $\mathbb{C}$ 的一个线

[①] 译者注: 原文中用的是 forme, 直译当为 "形式", 现根据国内泛函界的习惯改用 "泛函".

性算子; 这样就可以定义一个数 $\|f\| \in [0,+\infty]$; 我们有

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|$$
$$= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \quad (\text{当 } E \neq 0 \text{ 时});$$

而 $\|f\|$ 是使得

$$|f(x)| \leqslant a\|x\|$$

对于任意的 $x \in E$ 都成立的最小数 $a \in [0,+\infty]$.

2.3.2 E 上满足 $\|f\| < +\infty$ 的线性泛函全体 (根据 2.1.4, 也就是 E 上连续线性泛函全体) 构成赋范线性空间 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$.

2.3.3 定理. 设 E 是 Hilbert 空间.

(i) 对于任意 $x \in E$, 由 E 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $y \mapsto (y|x)$ 是 E 上的一个连续线性泛函, 记作 f_x;

(ii) 由 E 到 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 的映射 $x \mapsto f_x$ 是双射, 等距且是半线性的.

显见由 E 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $y \mapsto (y|x)$ 是 E 上的一个线性泛函, 记作 f_x. 我们有

$$|f_x(y)| = |(y|x)| \leqslant \|x\|\|y\|,$$

因此 (根据 2.1.2),

$$\|f_x\| \leqslant \|x\|.$$

而另一方面,

$$\|x\|^2 = |f_x(x)| \leqslant \|f_x\|\|x\|,$$

我们得到, 对于任意的 $x \neq 0$,

$$\|x\| \leqslant \|f_x\|.$$

这样就得到 $\|x\| = \|f_x\|$; 而当 $x = 0$ 时这显然成立.

设 $x_1, x_2 \in E$ 而 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. 这样对于任意的 $y \in E$,

$$f_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(y) = (y|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \overline{\lambda_1}(y|x_1) + \overline{\lambda_2}(y|x_2) = (\overline{\lambda_1} f_{x_1} + \overline{\lambda_2} f_{x_2})(y),$$

因此 $f_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = \overline{\lambda_1} f_{x_1} + \overline{\lambda_2} f_{x_2}$. 换句话说, 由 E 到 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 的映射 $x \mapsto f_x$ 是半线性的. 考虑到等式 $\|x\| = \|f_x\|$, 我们得到这个映射是单射.

下面来证明由 E 到 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 的映射 $x \mapsto f_x$ 是满射. 设 $f \in \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$, 我们证明存在 $x \in E$ 使得 $f = f_x$. 当 $f = 0$ 时这是显然的. 如果 $f \neq 0$, 那么 $F = \operatorname{Ker} f$ 是 E 中闭超平面. (根据 1.6.9) 线性子空间 $F^\perp$ 是 F 的补, 因此和 E/F 同构, 从而是 1

维的. 选择 $F^{\perp}$ 中的一个非零元素 t. 我们有 $f(t) \neq 0$, 所以只要把 t 乘上一个适当的数就可以假设 $f(t) = 1$. 设 $x = \|t\|^{-2}t$, 那么

$$f_x(t) = (t|\|t\|^{-2}t) = 1.$$

这样 f 和 f_x 在 t 重合, 而

$$f|_F = f_x|_F = 0,$$

因此 $f = f_x$.

2.3.4 设 X 是一个集合. 考虑以 X 为指标的一族都等于 $\mathbb{C}$ 的拓扑空间的乘积 $\mathbb{C}^X$; 这个集合也就是 X 上复值函数全体. 我们在其上赋予乘积拓扑 $\mathscr{C}$. 这个拓扑也称为**简单收敛拓扑**. (若 A 是 $\mathbb{C}^X$ 的子集, 那么 A 上由 $\mathscr{C}$ 诱导的拓扑称为 A 上的简单拓扑.)

我们来复习一下这个乘积拓扑的若干性质:

(i) 设 $f \in \mathbb{C}^X$. 我们可以用下述方法来构造 f 的一个邻域: 选取 X 中元素 $x_1, \cdots, x_n$ 和一个 $\varepsilon > 0$, 考虑集合 $V_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$, 其元素为满足

$$|g(x_1) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon, \cdots, |g(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$$

的 $g \in \mathbb{C}^X$. 当 $x_1, \cdots, x_n, \varepsilon$ 变化时, $V_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$ 就给出了 f 在 $\mathscr{C}$ 中的一个基本邻域系.

(ii) $\mathbb{C}^X$ 中的一列元素 $(f_1, f_2, \cdots)$ 收敛于 f 当且仅当对于任意的 $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.

(iii) 设 T 是一个拓扑空间, $t \in f_t$ 是从 T 到 $\mathbb{C}^X$ 的一个映射. 为使这个映射是连续的, 必须且只需对于任意的 $x \in X$, 由 T 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $t \mapsto f_t(x)$ 是连续的.

(iv) 对任意的 $x \in X$, 设 $\alpha_x \geqslant 0$ 是一个有限数. 设 Y 是对于任意的 x 满足 $|f(x)| \leqslant \alpha_x$ 的 $f \in \mathbb{C}^X$ 构成的集合. 那么 Y 是 $\mathbb{C}^X$ 中的紧集. 事实上, Y 就是乘积空间 $\prod\limits_{x \in X} B_x$, 其中 B_x 是 $\mathbb{C}$ 中以 0 为圆心, α 为半径的紧致圆盘.

2.3.5 将 2.3.4 应用于 X 是 Hilbert 空间 E, 而 $A = \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$. 由此定义的 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 上的分离拓扑称为**弱拓扑**. 设 $f \in \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$. 我们可以用下述方式构造 f 的一个弱邻域: 选取 E 中元素 $x_1, \cdots, x_n$ 和一个 $\varepsilon > 0$, 我们考虑集合 $W_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$, 其元素为满足

$$|g(x_1) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon, \cdots, |g(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$$

的 $g \in \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$. $W_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$ 构成了 f 的一个基本弱邻域系.

E 上的一列连续线性形式 $(f_1, f_2, \cdots)$ 收敛于一个连续线性形式 f 当且仅当对于任意的 $x \in E$, 都有 $f_n(x) \to f(x)$.

2.3.6 定理. *设 B 是满足 $\|f\| \leqslant 1$ 的全体 $f \in \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 构成的集合. 那么 B 是弱紧的.*

设 Y 是由对于任意的 $x \in E$ 满足 $|f(x)| \leqslant \|x\|$ 的 $f \in \mathbb{C}^E$ 构成的集合. 根据 2.3.4(iv), Y 对于简单收敛拓扑是紧的. 我们来证明, B 是 Y 中闭子集, 这样就完成了证明.

首先, 显然 $B \subset Y$. 设 Y 中一点 f 属于 B 的闭包. 我们来证明 f 是 E 上线性泛函. 设 $x, y \in E$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in B$, 使得

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |f(y) - g(y)| \leqslant \varepsilon, \quad |f(x+y) - g(x+y)| \leqslant \varepsilon,$$

即

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant |g(x+y) - g(x) - g(y)| + 3\varepsilon = 3\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 我们得到

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

同理可证, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. 最后, 对于任意的 $x \in E$, $|f(x)| \leqslant \|x\|$, 我们有 $f \in B$.

2.3.7 在 2.3.3 中我们定义了由 E 到 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 的双射 $x \mapsto f_x$. 我们利用这个双射把 E 上的弱拓扑搬到 $\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ 上去. 这样我们得到了 E 上的一个分离拓扑, 称之为**弱拓扑**.

设 $x \in E$. 我们可以用下述方式构造 x 的一个弱邻域: 选取 E 中元素 $x_1, \cdots, x_n$ 和一个 $\varepsilon > 0$, 我们考虑集合 $T_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$, 其元素为满足

$$|(x' - x|x_1)| \leqslant \varepsilon, \cdots, |(x' - x|x_n)| \leqslant \varepsilon$$

的 $x' \in \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$. 当 $x_1, \cdots, x_n, \varepsilon$ 变化时, $T_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$ 构成了 x 的一个基本弱邻域系.

E 上的一列元素 $(x_1, x_2, \cdots)$ 弱收敛于一个元素 x 当且仅当对于任意的 $t \in E$, 都有 $(x_n|t) \to (x|t)$.

2.3.8 定理. *设 E 是 Hilbert 空间. E 中的闭单位球是弱紧的.*

由 2.3.3 和 2.3.6 即可得到.

2.3.9 定理. *设 E 是 Hilbert 空间. E 上的范数拓扑比弱拓扑更为精细.*

(从图像的角度上说, 若 $u \in E$ 依范数趋向于 $u_0 \in E$, 那么 u 弱趋向于 u_0.)

事实上, 设 $x \in E$ 而 V 是 x 的一个弱邻域. 那么 V 包含了 2.3.7 中考虑的某个邻域 $T_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$. 设 V' 是以 x 为中心, 半径 $\eta > 0$ 的闭球, 其中 η 的选取满足

$$\eta\|x_1\| \leqslant \varepsilon, \cdots, \eta\|x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

这样 V' 是 x 的一个范数邻域, 而且 $V' \subset V$, 因为对于 $y \in V'$, 我们有, 对于 $i = 1, \cdots, n$,

$$|(y - x|x_i)| \leqslant \|y - x\|\|x_i\| \leqslant \eta\|x_i\| \leqslant \varepsilon.$$

2.3.10 一般地, E 上的范数拓扑严格地比弱拓扑更为精细. 例如, 取 $E = \ell^2$, 设 $(e_1, e_2, \cdots)$ 是 ℓ^2 的典范标准正交基. 对于任意的 n, 我们有 $\|e_n\| = 1$, 因此 (e_n) 不依范数收敛于 0; 但是 (e_n) 弱收敛于 0; 事实上, 设 $t = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 是 ℓ^2 中任意元素, 我们有: 当 $n \to +\infty$ 时

$$(e_n|t) = \overline{\lambda_n} \to 0,$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty.$$

在同一例子中, 我们提醒读者注意, ℓ^2 中的单位闭球 B 不是依范数紧的. 因为若 B 是紧的, 我们可以找到 $(e_1, e_2, \cdots)$ 的 Cauchy 子列 $(e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots)$. 而这是不可能的, 因为当 $i \neq j$ 时, $\|e_i - e_j\|^2 = 2$.

2.3.11 但是, 当 E 是有限维 Hilbert 空间时, E 上的范数拓扑和弱拓扑是一样的. 事实上, 我们可以假设 E 就是具有典范数量积的 $\mathbb{C}^n$. 设 $x \in \mathbb{C}^n$, 而 W 是以 x 为中心, 半径 $\varepsilon > 0$ 的闭球. 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的典范标准正交基, 而 V 是由满足

$$|(y - x|e_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \cdots, |(y - x|e_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

的 $y \in \mathbb{C}^n$ 构成的 x 的弱邻域. 这样, 若 $y \in V$, 我们有

$$\|y - x\|^2 = \sum_{p=1}^{n} |(y - x|e_p)|^2 \leqslant n\frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2,$$

即得 $y \in W$. 这样, $V \subset W$, 也就是说弱拓扑比范数拓扑更为精细.

2.3.12 根据 2.3.9 和 2.3.10, 范数拓扑也称作**强拓扑**.

设 E 是一个 Hilbert 空间. 原则上说, 从今以后如果我们希望在 E 中使用一些拓扑概念, 我们需要明确指出是对于范数拓扑还是对于弱拓扑的. 我们约定, 若没有明确说明, 则所考虑的一律为范数拓扑.

2.3.13 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, $(x_i)_{i \in I}$ 是 E 中一族元素. 我们假设对于任意的 $t \in E$ 有*

$$\sup_{i \in I} |(x_i|t)| < +\infty.$$

那么,

$$\sup_{i \in I} \|x_i\| < +\infty.$$

这一定理由 2.3.3 和 2.2.4 即可得到.

2.3.14 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, $(x_1, x_2, \cdots)$ 是 E 中弱收敛于 $x \in E$ 的一个序列. 那么

$$\sup_n \|x_n\| < +\infty, \quad 且 \quad \|x\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

第一个结论是 2.3.13 的推论. 另一方面,

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n|x) = \|x\|^2,$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} |(x_n|x)| = \|x\|^2.$$

因为 $|(x_n|x)| \leqslant \|x_n\|\|x\|$, 我们得到

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|\|x\| \geqslant \|x\|^2.$$

这样对于 $x \neq 0$, 第二个结论就成立. 而这个结论在 $x = 0$ 时是显然的.

2.3.15 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E; F)$. 那么 u 对于 E 和 F 上的弱拓扑连续. 设 B 是 E 上单位闭球, $u(B)$ 是弱闭的.

根据 2.3.4(iii), 我们需要证明的是, 对于任意的 $y \in F$, 由 E 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $x \mapsto (ux|y)$ 是弱连续的. 而根据 2.3.3, 这个映射具有形式 $x \mapsto (x|x_0)$. 设 $t \in E$ 而 $\varepsilon > 0$, (根据 2.3.7) 满足

$$|(t'|x_0) - (t|x_0)| \leqslant \varepsilon$$

的 $t' \in E$ 是一个弱邻域, 这样就得到映射的弱连续性. 第二个结论可以由第一个结论与 2.3.6 一起得到.

2.3.16 推论. 设 $u \in \mathcal{L}(E; F)$, 且 V 是 E 中开集. 若 $u(E) = F$, 则 $u(V)$ 是 F 中开集.

利用 2.3.15 中的记号, 我们有

$$E = B \cup 2B \cup 3B \cup \cdots,$$

因此

$$F = u(B) \cup 2u(B) \cup 3u(B) \cup \cdots.$$

而根据 2.3.15, $nu(B)$ 是闭的, 因此存在 n 使得 $u(nB)$ 包含了一个半径 $r > 0$ 的开球 C (Baire 定理). 这样 $u(2nB)$ 包含 $C - C$, 也就是说包含了一个以 0 为中心, r 为半径的开球. 设 $x_0 \in V$. 存在 $\lambda > 0$ 使得 $x_0 + \lambda B \subset V$. 因为 $u(V) \supset u(x_0 + \lambda B) = u(x_0) + \lambda u(B)$, 前述结果表明 $u(V)$ 包含了一个以 $u(x_0)$ 为中心且半径 > 0 的球, 即得结论.

2.4 连续半双线性型

2.4.1 设 E, F 是两个内积空间, f 是 $E \times F$ 上的一个半双线性型. 我们定义

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\, \|y\| \leqslant 1} |f(x, y)|.$$

和 2.1.1, 2.1.2 完全类似的, 我们可以证明, 对于任意的 $x \in E$, $y \in F$,

$$|f(x, y)| \leqslant \|f\|\|x\|\|y\|;$$

而且更确切地说, $\|f\|$ 是使得

$$|f(x, y)| \leqslant a\|x\|\|y\|$$

对于任意的 $x \in E$, $y \in F$ 都成立的最小的正数 $a \in [0, +\infty]$.

2.4.2 定理. 设 E, F 是两个内积空间, $f : E \times F \to \mathbb{C}$ 是一个半双线性型. 下述条件是等价的:

(i) f 在 $(0, 0)$ 连续;

(ii) f 连续;

(iii) $\|f\| < +\infty$.

(ii)$\Rightarrow$ (i) : 这是显然的.

(i)$\Rightarrow$ (iii) : 设 f 在 $(0, 0)$ 连续. 存在 $\eta > 0$ 使得

$$\|x\| \leqslant \eta \text{ 且 } \|y\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant 1.$$

这样, 若 $x \in E$, $y \in F$, 我们有

$$\|x\| \leqslant 1 \text{ 且 } \|y\| \leqslant 1 \Rightarrow \|\eta x\| \leqslant \eta \text{ 且 } \|\eta y\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(\eta x, \eta y)| \leqslant 1 \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant \eta^{-2}.$$

(iii)$\Rightarrow$(i) : 设 $\|f\| < +\infty$. 设 $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, $\varepsilon > 0$. 那么对于 $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon$ 和 $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$, 我们有

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leqslant |f(x - x_0, y - y_0)| + |f(x_0, y - y_0)| + |f(x - x_0, y_0)| \\
&\leqslant \|f\|\|x - x_0\|\|y - y_0\| + \|f\|\|x_0\|\|y - y_0\| + \|f\|\|x - x_0\|\|y_0\| \\
&\leqslant \varepsilon\|f\|(\varepsilon + \|x_0\| + \|y_0\|),
\end{aligned}$$

由此即得 f 在 (x_0, y_0) 的连续性.

2.4.3 定理. 设 E, F 为 Hilbert 空间.

(i) 对于任意的 $u \in \mathcal{L}(E; F)$, 由 $E \times F$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $(x, y) \mapsto (ux|y)$ 是 $E \times F$ 上的一个半双线性型, 记作 f_u;

(ii) 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $E\times F$ 上的半双线性型集合的映射 $u\mapsto f_u$ 是双射. 对于任意的 $u\in\mathcal{L}(E;F)$ 我们有 $\|f_u\|=\|u\|$.

显然, 由 $E\times F$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $(x,y)\mapsto(ux|y)$ 定义了 $E\times F$ 上的一个半双线性型 f_u. 我们有

$$|f_u(x,y)|=|(ux|y)|\leqslant\|ux\|\|y\|\leqslant\|u\|\|x\|\|y\|,$$

因此 (根据 2.4.2) f_u 是连续的, 而且我们有

$$\|f_u\|\leqslant\|u\|. \tag{12}$$

设 $v\in\mathcal{L}(E;F)$. 若 $f_u=f_v$, 对于任意的 $x\in E$, $y\in F$, 我们有 $(ux|y)=(vx|y)$, 因此对于任意的 $x\in E$, $ux-vx=0$, 即 $u=v$. 所以映射 $u\mapsto f_u$ 是单射.

设 f 是 $E\times F$ 上一个连续半双线性型. 暂时固定 $x\in E$. 由 F 到 $\mathbb{C}$ 上的映射 $y\mapsto\overline{f(x,y)}$ 是 F 上的一个线性泛函, 记作 g_x. 对于任意的 $y\in F$, 我们有

$$|g_x(y)|=|f(x,y)|\leqslant\|f\|\|x\|\|y\|,$$

所以 g_x 连续, 且

$$\|g_x\|\leqslant\|f\|\|x\|.$$

根据 2.3.3, 存在 F 的元素 x', 使得

$$\|x'\|\leqslant\|f\|\|x\|,$$

而且对于任意的 $y\in F$, 有

$$g_x(y)=(y|x').$$

这个元素 x' 依赖于 x. 这样我们就定义了一个从 E 到 F 的映射 $u:x\mapsto x'$, 对于任意的 $x\in E$, $y\in F$, 满足

$$f(x,y)=\overline{g_x(y)}=(x'|y)=(ux|y). \tag{13}$$

由关系式 $f(x,y)=(ux|y)$, 易知 u 是一个线性算子. 而且我们有

$$\|ux\|=\|x'\|\leqslant\|f\|\|x\|,$$

因此 $u\in\mathcal{L}(E;F)$ 且 $\|u\|\leqslant\|f\|$.

对于任意的 $x\in E$ 和 $y\in F$, 我们有 $f_u(x,y)=(ux|y)=f(x,y)$, 因此 $f_u=f$, 这样我们就证明了由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $E\times F$ 上全体半双线性型集合的映射 $u\mapsto f_u$ 是满射. 与此同时, 我们得到 $\|u\|\leqslant\|f_u\|$. 与 (12) 联立, 即得 $\|u\|=\|f_u\|$.

2.4.4　推论. 设 $u\in\mathcal{L}(E)$, $v\in\mathcal{L}(E)$. 若对于任意的 $x\in E$, 都有 $(ux|x)=(vx|x)$, 则我们有 $u=v$.

事实上, 根据 1.1.6, $E\times E$ 上的半双线性型 $(x,y)\mapsto(ux|y)$ 和 $(x,y)\mapsto(vx|y)$ 是等同的.

2.5　共轭

2.5.1　设 E, F 是 Hilbert 空间 $u \in \mathcal{L}(E; F)$. 对于 $x \in E, y \in F$, 定义

$$f(x, y) = (ux|y), \quad g(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

这样 f 是 $E \times F$ 上的一个半双线性型, 且 (根据 2.4.3) $\|f\| = \|u\|$. 因此 g 是 $F \times E$ 上的一个半双线性型, 且 $\|g\| = \|f\|$. 根据 2.4.3, 存在唯一的 $v \in \mathcal{L}(F; E)$ 满足对于任意的 $y \in F, x \in E$ 有 $g(y, x) = (vy|x)$, 即

$$(vy|x) = (y|ux).$$

我们称 v 是 u **的共轭**, 记作 u^*. 它由下述关系刻画: 对于任意的 $x \in E, y \in F$,

$$\boxed{(y|ux) = (u^*y|x).}$$

2.5.2　根据 2.4.3, 我们有 $\|v\| = \|g\|$, 因此

$$\boxed{\|u^*\| = \|u\|.}$$

2.5.3　设 $(e_i)_{i \in I}$ 是 E 的标准正交基, $(f_j)_{j \in J}$ 是 F 的标准正交基, $(\alpha_{ji})_{j \in J, i \in I}$ 是 u 关于 (e_i), (f_j) 的矩阵, $(\beta_{ij})_{i \in I, j \in J}$ 是 u^* 关于 (f_j), (e_i) 的矩阵. 这样, 这两个矩阵是共轭的, 即

$$\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}.$$

事实上,

$$\beta_{ij} = (u^* f_j | e_i) = (f_j | u e_i) = \overline{\alpha_{ji}}.$$

2.5.4　利用 2.5.3 中的记号. 在 2.1.10 中我们看到, 对于任意的 $i \in I$,

$$\sum_{j \in J} |\alpha_{ji}|^2 < +\infty. \tag{14}$$

由这一关系式和 2.5.3, 我们得到, 对于任意的 $j \in J$,

$$\sum_{i \in I} |\alpha_{ji}|^2 < +\infty. \tag{15}$$

2.5.5　**例.**　利用 2.1.13 中的记号. 对于任意的 $f, g \in L^2(\Delta)$, 我们有

$$(u_f g | h) = \int_\Delta f(t) g(t)\, \overline{h(t)}\, \mathrm{d}t,$$
$$(g | u_{\bar{f}} h) = \int_\Delta f(t) g(t)\, \overline{h(t)}\, \mathrm{d}t,$$

因此

$$(u_f)^* = u_{\bar{f}}.$$

2.5.6 例. 取 2.1.14 中的记号. 在 $\Delta' \times \Delta$ 上用

$$K^*(t',t) = \overline{K(t,t')}$$

定义函数 K^*. 因为

$$\int_{\Delta'}\int_{\Delta} |K^*(t',t)|^2 \, \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t = \int_{\Delta}\int_{\Delta'} |K(t,t')|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' < +\infty,$$

我们可以考虑 v_{K^*}. 对于任意的 $g \in L^2(\Delta)$ 和 $h \in L^2(\Delta')$, 我们有

$$(v_K g|h) = \int_{\Delta'} \left(\int_{\Delta} K(t,t') g(t) \, \mathrm{d}t \right) \overline{h(t')} \, \mathrm{d}t' = \int_{\Delta}\int_{\Delta'} K(t,t') g(t) \, \overline{h(t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t'.$$

(我们可以应用 Lebesgue-Fubini 定理, 因为函数 $(t,t') \mapsto K(t,t')$ 和 $(t,t') \mapsto g(t)\overline{h(t')}$ 在 $\Delta \times \Delta'$ 上都是平方可积的, 因此它们的乘积在 $\Delta \times \Delta'$ 上可积.) 同理,

$$\begin{aligned}
(g|v_{K^*}h) &= \int_{\Delta} g(t) \overline{\left(\int_{\Delta'} K^*(t',t) h(t') \, \mathrm{d}t' \right)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\Delta}\int_{\Delta'} \overline{K^*(t',t)} \, g(t) \, \overline{h(t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' \\
&= \int_{\Delta}\int_{\Delta'} K(t,t') g(t) \, \overline{h(t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t',
\end{aligned}$$

因此

$$(v_K)^* = v_{K^*}.$$

2.5.7 设 E, F 是 Hilbert 空间, 而 u, $u' \in \mathcal{L}(E;F)$. 对于任意的 $x \in E$, $y \in F$, 我们有

$$(y|(u+u')x) = (y|ux) + (y|u'x) = (u^*y|x) + (u'^*y|x) = ((u^* + u'^*)y|x),$$

因此

$$\boxed{(u+u')^* = u^* + u'^*.}$$

同理, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*.}$$

由上述结果和 2.5.2 我们得到, 从 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(F;E)$ 的映射 $u \mapsto u^*$ 是依范数连续的.

2.5.8 始终保持同样的记号, 我们有

$$(x|u^*y) = \overline{(u^*y|x)} = \overline{(y|ux)} = (ux|y),$$

因此

$$\boxed{(u)^{**} = u.}$$

2.5.9 设 E, F, G 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $u' \in \mathcal{L}(F;G)$. 对于任意的 $x \in E$ 和任意的 $z \in G$, 我们有

$$(u'ux|z) = (ux|u'^*z) = (x|u^*u'^*z),$$

因此

$$\boxed{(u'u)^* = u^*u'^*.}$$

2.5.10 当 I 表示映射 id_E 时, 显然

$$I^* = I.$$

2.5.11 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 我们有

$$\boxed{\|uu^*\| = \|u^*u\| = \|u\|^2.}$$

事实上, (根据 2.1.8(ii) 和 2.5.2) 我们有

$$\|u^*u\| \leqslant \|u^*\|\|u\| = \|u\|^2.$$

另一方面, 对于 $x \in E$, 有

$$\|ux\|^2 = (ux|ux) = (u^*ux|x) \leqslant \|u^*ux\|\|x\| \leqslant \|u^*u\|\|x\|^2,$$

即得

$$\|u\| \leqslant \|u^*u\|^{1/2}.$$

这样我们就证明了

$$\|u^*u\| = \|u\|^2.$$

对 u^* 应用这个结果, 可得

$$\|u^{**}u^*\| = \|u^*\|^2,$$

即 $\|uu^*\| = \|u\|^2$.

2.5.12 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$, A 是 E 的子集, B 是 F 的子集.

(i) 设 $u(A) \subset B$, 那么 $u^*(B^\perp) \subset A^\perp$;

(ii) 设 A 和 B 是两个闭线性子空间, 且 $u^*(B^\perp) \subset A^\perp$, 那么 $u(A) \subset B$.

(i) 假设 $u(A) \subset B$. 设 $y \in B^\perp$, $x \in A$. 因为 $ux \in B$ 而 $y \in B^\perp$, 所以

$$(u^*y|x) = (y|ux) = 0.$$

因此 $u^*y \in A^\perp$, 从而 (i) 得证.

(ii) 假设 $u^*(B^\perp) \subset A^\perp$. 应用 (i), 我们得到 $u^{**}(A^{\perp\perp}) \subset B^{\perp\perp}$. 但 $u^{**} = u$, 然后只要应用 1.6.10 就可以了.

2.5.13　推论. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$, F 是 E 的一个闭线性子空间. 为使 F 对于 u 稳定①, 必须且只需 $F^\perp$ 对于 u^* 稳定.

这是 2.5.12 的直接推论.

2.5.14　推论. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$, F 是 E 的一个闭线性子空间. 下述条件是等价的:

(i) F 和 $F^\perp$ 对于 u 稳定;

(ii) F 和 $F^\perp$ 对于 u^* 稳定;

(iii) F 对于 u 和 u^* 是稳定的.

这是 2.5.13 的直接推论.

2.5.15　定义. 若 2.5.14 中的条件满足, 则我们称 F 化简 u.

如果这种情况发生, 那么对于 u 的研究就完全归结为对 $u|_F$ 和 $u|_{F^\perp}$ 的研究.

2.5.16　定理. 利用 2.2.7 中的记号, 若 $u = \bigoplus_{i\in I} u_i$, 则我们有 $u^* = \bigoplus_{i\in I} u_i^*$.

定义 $v = \bigoplus_{i\in I} u_i^*$. 我们要对任意的 $x \in E$ 和 $y \in F$, 证明 $(ux|y) = (x|vy)$. 由线性性和连续性, 我们只要考虑 $x \in E_i$, $y \in F_j$ 的情形. 若 $i \neq j$, 我们有 $(ux|y) = 0$ 而 $(x|vy) = 0$. 若 $i = j$, 我们有

$$(ux|y) = (u_i x|y) = (x|u_i^* y) = (x|vy).$$

2.5.17　定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$.

(i) $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$;

(ii) $\overline{\operatorname{Im} u} = (\operatorname{Ker} u^*)^\perp$;

(iii) $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$;

(iv) $\overline{\operatorname{Im} u^*} = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

在等式 (i) 和 (ii) 中交换 u 和 u^*, 即可得到 (iii) 和 (iv). 现在来证明 (i). 设 $y \in F$. 我们有

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Ker} u^* &\Leftrightarrow u^* y = 0 \Leftrightarrow \text{对于任意的 } x \in E,\ (u^*y|x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{对于任意的 } x \in E,\ (y|ux) = 0 \Leftrightarrow y \in (\operatorname{Im} u)^\perp, \end{aligned}$$

即得 (i). 在等式 (i) 中, 取左右两边的正交补. 我们得到

$$(\operatorname{Ker} u^*)^\perp = (\operatorname{Im} u)^{\perp\perp} = (\overline{\operatorname{Im} u})^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} u}.$$

①译者注: 所谓 F 对于 u 稳定, 是指 $u(F) \subset F$.

2.5.18 利用 2.5.17 中的记号, 我们称 $E_1 = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ 是 u 的**支撑子空间**. 设 F_1 是 u^* 的支撑子空间. 根据 2.5.17(ii), 我们有 $F_1 = \overline{\operatorname{Im} u}$. 设 v 是 u 在 E_1 上的限制 (作为 E_1 到 F_1 的映射). 这样:

a) v 是单射 (因为 $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Ker} u) \cap E_1 = 0$);

b) v 的像在 F_1 中稠密 (因为 $\operatorname{Im} v = v(E_1) = u(E_1) = u(E) = \operatorname{Im} u$).

空间 E 是 E_1 和 $\operatorname{Ker} u$ 的 Hilbert 和, 而 $u|_{\operatorname{Ker} u} = 0$. 对 u 的研究就完全归结到对 v 的研究, 即研究一个具有稠密像的连续单射线性算子.

2.6 双连续[①]线性算子

2.6.1 定理. *设 E, F 是内积空间, $u \in \mathcal{L}(E; F)$. 下述条件是等价的:*

(i) u 是双射, 而且是双连续的;

(ii) u 是满射, 且存在 $b > 0$ 使得对于任意的 $x \in E$, 有 $\|ux\| \geqslant b\|x\|$.

若 E, F 是 Hilbert 空间, 这些条件等价于

(iii) u 是双射.

(i)⇒(ii) : 设 u 是双射, 而且是双连续的. 设 $b = \|u^{-1}\|^{-1} > 0$. 设 $x \in E$. 我们定义 $y = ux$. 我们有

$$\|x\| = \|u^{-1}y\| \leqslant \|u^{-1}\|\|y\| = b^{-1}\|y\| = b^{-1}\|ux\|,$$

因此 $\|ux\| \geqslant b\|x\|$.

(ii)⇒(i): 设条件 (ii) 满足. 设 $ux = 0$, 我们有 $x = 0$, 因此 u 是单射. 我们可以考虑 u^{-1}, 它是从 F 到 E 的线性算子. 设 $y \in F$. 定义 $x = u^{-1}y$. 我们有

$$\|y\| = \|ux\| \geqslant b\|x\|,$$

因此 $\|u^{-1}y\| \leqslant b^{-1}\|y\|$. 这就证明了 u^{-1} 是连续的.

在 Hilbert 空间的情形, 可以由 2.3.16 得到 (iii)⇒(i).

2.6.2 设 $u \in \mathcal{L}(E; F)$. 若 u 是双射, 而且是双连续的, 则上述证明中 (i)⇒(ii) 表明, 对于任意的 $x \in E$,

$$\|ux\| \leqslant \|u^{-1}\|^{-1}\|x\|;$$

而上述证明中 (ii)⇒(i) 表明, 若对于任意的 $x \in E$ 有 $\|ux\| \geqslant b\|x\|$, 则我们有

$$b \leqslant \|u^{-1}\|^{-1}.$$

2.6.3 设 E 是内积空间. E 上的双连续线性双射就是环 $\mathcal{L}(E)$ 中的可逆元.

---

① 译者注: 一个线性算子双连续, 是指它和它的逆算子都是连续的.

2.6.4 定理. 设 E 是内积空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 设 ρ 是 u 的谱半径. 若 $\rho < 1$ (例如当 $\|u\| < 1$ 时), 则 $1 - u$ 在 $\mathcal{L}(E)$ 中是可逆的, 且

$$(1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \cdots .$$

这个级数是绝对收敛的 (即 $\sum_{n=0}^{\infty} \|u^n\| < +\infty$).

设 σ 满足 $\rho < \sigma < 1$. 那么对于充分大的 n, 有 $\|u^n\| \leqslant \sigma^n$, 因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \|u^n\|$ 是收敛的. 因为 (根据 2.2.3) $\mathcal{L}(E)$ 是依范数完备的, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ 依范数收敛. 以 v 记它的和. 我们有

$$(1-u)(1+u+\cdots+u^n) = (1+u+\cdots+u^n) - (u+u^2+\cdots+u^{n+1}) = 1 - u^{n+1}.$$

当 $n \to +\infty$ 时, 取极限, 利用 2.1.9, 我们得到

$$(1-u)v = 1.$$

同理可证 $v(1-u) = 1$.

2.6.5 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, U (相应地, V) 是由 E 到 F (相应地, F 到 E) 的双连续双射线性算子全体.

(i) U 是 $\mathcal{L}(E; F)$ 中开集;

(ii) 对于 $u \in U$ 定义的映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是 U 到 V 的线性算子.

(i) 设 $u_0 \in U$, 而 $u \in \mathcal{L}(E; F)$ 满足 $\|u - u_0\| < \|u_0^{-1}\|^{-1}$. 定义 $v - u_0^{-1}u \in \mathcal{L}(E)$. 我们有

$$\|v - 1\| = \|u_0^{-1}(u - u_0)\| \leqslant \|u_0^{-1}\|\|u - u_0\| < 1.$$

根据 2.6.4, v 在 $\mathcal{L}(E)$ 中可逆. 因为 $u = u_0 v$, u 是双射, 且是双连续的. 因此 U 在 $\mathcal{L}(E; F)$ 中是开的.

(ii) 显然, 对于 $u \in U$, 我们有 $u^{-1} \in V$, 且由 U 到 V 的映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是 U 到 V 的双射. 设 $u_0 \in U$, 现在我们来证明 $u \mapsto u^{-1}$ 在 u_0 连续. 记 $v = u_0^{-1}u$, 那么 v 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的可逆元素. 我们有 $u^{-1} = v^{-1}u_0^{-1}$, 因此只需证明映射 $v \mapsto v^{-1}$ 作为 $\mathcal{L}(E)$ 中的可逆元素集 A 到自身的映射在 1 处是连续的. 而根据 2.6.4, 我们有, 对于 $\|1 - v\| < 1$:

$$v^{-1} - 1 = (1 - (1 - v))^{-1} - 1 = (1 - v) + (1 - v)^2 + (1 - v)^3 + \cdots ,$$

因此

$$\|v^{-1} - 1\| \leqslant \|1 - v\| + \|1 - v\|^2 + \|1 - v\|^3 + \cdots = \frac{\|1 - v\|}{1 - \|1 - v\|},$$

所以, 当 $\|1-v\| \to 0$ 时, $\|v^{-1}-1\| \to 0$.

这样就证明了从 U 到 V 的映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是连续的. 交换 E 和 F, 这样就得到它是双连续的.

2.6.6 定理. *设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 为使 u 是双射且是双连续的, 必须且只需 u^* 是双射且是双连续的. 在此情况下, $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.*

设 u 是双射且是双连续的. 记 $u^{-1}=v$. 我们有

$$uv = \mathrm{id}_F, \quad \text{且 } vu = \mathrm{id}_E,$$

因此

$$v^*u^* = \mathrm{id}_F, \quad \text{且 } u^*v^* = \mathrm{id}_E.$$

这样就证明了 u^* 是双射且是双连续的, 且 $(u^*)^{-1} = v^*$.

在上文中交换 u 和 u^*, 这样, 当 u^* 是双射且双连续时, u 也是双射且是双连续的.

2.7 特征值

2.7.1 设 E 是复线性空间, 而 u 是 E 的一个线性算子. E 的一个元素 x 称作 u 的**特征向量**, 若存在某个复数 λ 满足 $ux=\lambda x$. 一个复数 μ 称作 u 的**特征值**, 若存在某个非零的 $y \in E$ 使得 $uy = \mu y$. u 的特征值全体称为 u 的**点谱**.

2.7.2 0 向量总是 u 的特征向量, 且对于任意的 λ 都有 $u(0)=\lambda 0$. 反之, 若 x 是 u 的一个非零特征向量, 那么满足 $ux=\lambda x$ 的 λ 是唯一确定的, 而且显然 λ 是一个特征值. 我们称之为 x **对应的特征值**.

设 $\mu \in \mathbb{C}$. 满足 $uy=\mu y$ 的 $y \in E$ 构成的集合是 $\mathrm{Ker}(u-\mu)$, 因此是 E 的一个线性子空间, 记作 E_μ. 我们称之为 μ **对应的特征子空间**. 称 μ 是一个特征值就是说 $E_\mu \neq \{0\}$. 设 E 是一个 Hilbert 空间而 $u \in \mathcal{L}(E)$, E_μ 是 E 的一个闭线性子空间, 因此它的 Hilbert 维数是确定的; 我们称之为 μ 的**重数**.

2.7.3 例. 设 E 具有有限维数 n, 我们知道 u 具有至少一个, 至多 n 个特征值.

2.7.4 例. 我们沿用例 2.1.11 及其中记号. u 的特征值就是那些 α_i. 事实上, 因为 $ue_i = \alpha_i e_i$, 每个 α_i 都是特征值. 反之, 设 λ 是一个特征值. 存在 $\ell^2(I)$ 中的 $x \neq 0$ 使得 $ux=\lambda x$. 设 $x=(x_i)_{i\in I}$. 我们有 $ux = (\alpha_i x_i)_{i \in I}$, 因此对于任意的 i, $\lambda x_i = \alpha_i x_i$. 存在一个 $j \in I$ 满足 $\lambda_j \neq 0$. 这样等式 $\lambda x_j = \alpha_j x_j$ 推出 $\lambda = \alpha_j$.

2.7.5 例. 我们沿用例 2.1.13 及其中记号, 假设 Δ 是有界的, 且对于任意的 $t \in \Delta$ 取 $f(t) = t$. 那么 u_f 的点谱是空的. 事实上, 设 $g \in L^2(\Delta)$, $\mu \in \mathbb{C}$ 满足 $u_f g = \mu g$. 我们有

$$0 = \|(u_f - \mu)g\|^2 = \int_\Delta |(t-\mu)g(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

因此存在零测度集 $A \subset \Delta$, 使得对于 $t \notin A$, 都有 $(t-\mu)g(t) = 0$. 那么对于 $t \notin A \cup \{\mu\}$ 有 $g(t) = 0$, 而 $A \cup \{\mu\}$ 是零测度的. 因此在 $L^2(\Delta)$ 中 $g = 0$.

2.8 谱, 豫解式

2.8.1 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 考虑所有使得 $u - \lambda$ 在 $\mathcal{L}(E)$ 中是可逆的 λ 全体构成的集合. 这个集合在 $\mathbb{C}$ 中的补集称为 u 的**谱**, 记作 $\operatorname{Sp} u$. [1]

2.8.2 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$.*

(i) $\operatorname{Sp} u$ 是 $\mathbb{C}$ 中闭集;

(ii) u 的任意特征值都是 $\operatorname{Sp} u$ 中元素.

(i) 由 $\mathbb{C}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射 $\lambda \mapsto u - \lambda$ 是依范数连续的. (根据 2.6.5(i)) $\mathcal{L}(E)$ 中不可逆元的集合在范数拓扑下是闭集, 因此它在前述映射下的逆像是 $\mathbb{C}$ 中闭集.

(ii) 设 λ 是 u 的特征值, $u - \lambda$ 不是单射, 因此 $\lambda \in \operatorname{Sp} u$.

2.8.3 例. 设 E 是有限维 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 我们知道 $\mathcal{L}(E)$ 中的单射元都是双射, 这样根据 2.1.6, 它是双连续的. 因此 u 的谱就是它的点谱.

2.8.4 例. 我们考虑例 2.1.11 及其中记号. 根据 2.7.4 和 2.8.2, $\operatorname{Sp} u$ 包含全体 α_i 构成的集合的闭包 A. 我们来证明 $\operatorname{Sp} u = A$. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $\lambda \notin A$. 数族 $((\alpha_i - \lambda)^{-1})_{i \in I}$ 是有界的. 根据 2.1.11, 存在 $v \in \mathcal{L}(\ell^2(I))$, v 把 $\ell^2(I)$ 的元素 (λ_i) 映到 $\left(\dfrac{\lambda_i}{\alpha_i - \lambda}\right)_{i \in I}$. 容易验证 $(u - \lambda)ve_i = v(u-\lambda)e_i = e_i$, 因此 $u - \lambda$ 在 $\mathcal{L}(\ell^2(I))$ 中有逆 v, 这样 $\lambda \notin \operatorname{Sp} u$.

2.8.5 例. 我们考虑例 2.1.13 及其中记号, 假设 Δ 是有界的 (但不是一个单点集), 且对于任意的 $t \in \Delta$ 取 $f(t) = t$. 我们来证明 $\operatorname{Sp} u_f = \overline{\Delta}$. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda \notin \overline{\Delta}$. 这样 Δ 上的函数 $t \mapsto g(t) = \dfrac{1}{t - \lambda}$ 是有界的. 这样我们就可以考虑 $L^2(\Delta)$ 上的连续线性算子 u_g. 容易验证

$$(u_f - \lambda)u_g = u_g(u_f - \lambda) = 1.$$

因此 $\lambda \notin \operatorname{Sp} u_f$. 现在假设 $\mu \in \overline{\Delta}$. 设 $\varepsilon > 0$. 存在长度为 $l > 0$ 的 Δ 的子区间 Δ' 使得

$$t \in \Delta' \Rightarrow |t - \mu|^2 \leqslant \varepsilon.$$

[1] 记作 $\operatorname{Sp} u$, $\operatorname{Sp}(u)$, 或 $\sigma(u)$ 均可.

设 h 是 Δ 上 Δ' 的特征函数. 我们有

$$\|h\|^2 = \int_\Delta |h(t)|^2 \, \mathrm{d}t = l,$$

且

$$\|(u_f - \mu)h\|^2 = \int_\Delta |(t-\mu)h(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon l = \varepsilon \|h\|^2.$$

根据 2.6.1, $u_f - \mu$ 在 $\mathcal{L}(E)$ 中不是可逆的, 因此 $\mu \in \operatorname{Sp} u_f$.

2.8.6 定义. *设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 定义在 $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$ 上, 取值在 $\mathcal{L}(E)$ 中的函数 $\lambda \mapsto (u-\lambda)^{-1}$ 称作 u 的豫解式*[①].

2.8.7 对 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$, 定义 $R(\lambda) = (u-\lambda)^{-1}$. 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$, 我们有

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu). \tag{16}$$

事实上,

$$\begin{aligned}(u-\lambda)(R(\lambda)-R(\mu))(u-\mu) &= ((u-\lambda)R(\lambda))(u-\mu) - (u-\lambda)(R(\mu)(u-\mu)) \\ &= u - \mu - (u-\lambda) = \lambda - \mu,\end{aligned}$$

然后只要左乘 $(u-\lambda)^{-1} = R(\lambda)$, 右乘 $(u-\mu)^{-1} = R(\mu)$, 即可.

2.8.8 豫解式是从 $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的**连续**映射. 这由 2.6.5(ii) 可以得到.

2.8.9 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$, ρ 是它的谱半径.*

(i) 若 $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, 我们有 $|\lambda| \leqslant \rho$;

(ii) 若 $E \neq 0$, 则存在 $\lambda \in \operatorname{Sp} u$ 满足 $|\lambda| = \rho$.

设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $\rho < |\lambda|$. 那么 $\lambda \neq 0$, 而 $\lambda^{-1}u$ 的谱半径 < 1. 因此 (根据 2.6.4) $1 - \lambda^{-1}u$ 是可逆的, 所以 $\lambda - u$ 是可逆的, $\lambda \notin \operatorname{Sp} u$. 这就证明了 (i).

现在假设 u 是可逆的, 并以 v 记它的逆. 对于任意的整数 $n \geqslant 0$, 我们有 $u^n v^n = 1$; 若 $E \neq \{0\}$, 我们得到

$$1 \leqslant \|u^n\|\|v^n\| \leqslant \|u^n\|\|v\|^n, \quad \text{即 } 1 \leqslant \|u^n\|^{1/n}\|v\|.$$

取极限, 我们得到 $1 \leqslant \rho\|v\|$, 因此 $\rho > 0$. 这样, 若 $\rho = 0$, 则 u 是不可逆的, $0 \in \operatorname{Sp} u$. 这样就对 $\rho = 0$ 证明了 (ii).

下面我们要对 $\rho > 0$ 证明 (ii). 首先, 我们立即可以化简到 $\rho = 1$ 的情形. 这样对于任意的 $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, 都有 $|\lambda| \leqslant 1$. 我们用反证法, 假设对于任意的 $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, 都有 $|\lambda| < 1$. 那么 u 的豫解式 $\lambda \mapsto R(\lambda)$ 至少对于 $|\lambda| \geqslant 1$ 都有定义而且是连续的.

---

①译者注: 在某些中文文献里, 也用 "拟基本解" 这个术语.

设 $\varepsilon > 0$; 存在 $\alpha > 1$ 使得

$$|\lambda| = 1 \Rightarrow \|R(\lambda) - R(\alpha\lambda)\| \leqslant \varepsilon \tag{17}$$

(因为豫解式在紧集 $\{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2\}$ 上是一致连续的). 设 $n > 0$ 是一个整数. 设 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是 1 的 n 次根. 由一个简单的分解可以得到, 对于 $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n - \mu^n} = \frac{1}{X - \mu\omega_1} + \cdots + \frac{1}{X - \mu\omega_n},$$

即

$$nX^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} (X - \mu\omega_j) \right).$$

假设 $|\mu| \geqslant 1$. 那么因为 $(u^n - \mu^n) = (u - \mu\omega_1) \cdots (u - \mu\omega_n)$, 所以

$$nu^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} (u - \mu\omega_j) \right) = (u^n - \mu^n) \sum_{i=1}^{n} (u - \mu\omega_i)^{-1}.$$

因此,

$$nu^{n-1}(u^n - \mu^n)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} R(\mu\omega_i).$$

特别地,

$$\begin{cases} u^{n-1}(u^n - \alpha^n)^{-1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R(\alpha\omega_i), \\ u^{n-1}(u^n - 1)^{-1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R(\omega_i). \end{cases}$$

考虑到 (17), 我们有

$$\|u^n(u^n - 1)^{-1} - u^n(u^n - \alpha^n)^{-1}\| \leqslant \varepsilon\|u\|. \tag{18}$$

注意到

$$u^n(u^n - 1)^{-1} = (u^n - 1 + 1)(u^n - 1)^{-1} = 1 + (u^n - 1)^{-1},$$
$$u^n(u^n - \alpha^n)^{-1} = (u^n - \alpha^n + \alpha^n)(u^n - \alpha^n)^{-1} = 1 + (\alpha^{-n}u^n - 1)^{-1}.$$

这样 (18) 就成为

$$\|(u^n - 1)^{-1} - (\alpha^{-n}u^n - 1)^{-1}\| \leqslant \varepsilon\|u\|. \tag{19}$$

设 α' 满足 $1 < \alpha' < \alpha$. 存在整数 N 满足

$$n \geqslant N \Rightarrow \|u^n\| \leqslant \alpha'^n \Rightarrow \|\alpha^{-n}u^n\| \leqslant \alpha^{-n}\alpha'^n = (\alpha'/\alpha)^n,$$

而当 $n \to +\infty$ 时 $(\alpha'/\alpha)^n \to 0$. 因此对于充分大的 n, 我们有

$$\|(\alpha^{-n}u^n - 1)^{-1} + 1\| \leqslant \varepsilon,$$

而 (18) 给出

$$\|(u^n - 1)^{-1} + 1\| \leqslant \varepsilon(1 + \|u\|).$$

这样我们就得到, 当 $n \to +\infty$ 时, $(u^n - 1)^{-1} \to -1$, 所以 $u^n - 1 \to -1$, 即得 $u^n \to 0$. 而这是不可能的, 因为 (根据 2.2.6) 对于任意的 n,

$$1 = \rho^n \leqslant \|u^n\|.$$

2.8.10 这样我们看到 $\mathbb{C}$ 中以 0 为中心, 以 ρ 为半径的闭圆盘是包含 $\operatorname{Sp} u$ 的最小的闭圆盘; 这就解释了 "谱半径" 这个词的来历.

2.8.11 根据 2.8.2 和 2.8.9(ii), (当 $E \neq \{0\}$ 时) $\operatorname{Sp} u$ 是 $\mathbb{C}$ 的**非空紧子集**. 例 2.8.4 还证明了 $\mathbb{C}$ 中任何一个非空紧子集都可以作为 $\operatorname{Sp} u$.

2.8.12 在陈述下述一些性质时, 我们用 z^* (而不是 $\bar{z}$) 来记复数 z 的共轭. 对于 $\mathbb{C}$ 的子集 A, 我们用 A^* (而不是 $\overline{A}$) 来表示集合 $\{z^*, z \in A\}$, 这样我们就可以避免和 A 的闭包混淆起来. (注意到如果我们把一个复数 z 等同于 $\mathbb{C}$ 上以 z 为系数的乘法算子, 那么 z 的共轭正好就是 z 的共轭复数.)

2.8.13 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 我们有 $\operatorname{Sp}(u^*) = (\operatorname{Sp} u)^*$.*

设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使 $u - \lambda$ 可逆, 那么 (根据 2.6.6) $u^* - \lambda^* = (u - \lambda)^*$ 也是可逆的. 因此 $\operatorname{Sp}(u^*) \subset (\operatorname{Sp} u)^*$. 交换 u 和 u^*, 我们就得到需要的等式.

2.8.14 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的可逆元 (即 $0 \notin \operatorname{Sp} u$). 我们有 $\operatorname{Sp}(u^{-1}) = (\operatorname{Sp} u)^{-1}$.*

设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使 $u - \lambda$ 可逆, 那么 $u^{-1} - \lambda^{-1} = -\lambda^{-1}u^{-1}(u - \lambda)$ 也是可逆的. 因此 $\operatorname{Sp}(u^{-1}) \subset (\operatorname{Sp} u)^{-1}$. 交换 u 和 u^{-1}, 即得等式.

2.8.15 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$, $p \in \mathbb{C}[X]$ 满足 $p(u) \in \mathcal{L}(E)$. 我们有 $\operatorname{Sp}(p(u)) = p(\operatorname{Sp} u)$.*

我们可以假设 $E \neq \{0\}$, 这样 $\operatorname{Sp} u \neq \varnothing$.

设 $q \in \mathbb{C}[X]$. 为使得 $q(u)$ 是可逆的, 必须且只需 q 在 $\operatorname{Sp} u$ 上处处不为 0. 事实上, 我们可以假设 $q \neq 0$. 我们写下分解式 $q(X) = \alpha(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$. 若 q 在 $\operatorname{Sp} u$ 上处处不为 0, 我们有 $\lambda_1 \notin \operatorname{Sp} u, \cdots, \lambda_n \notin \operatorname{Sp} u$, 因此 $q(u) = \alpha(u - \lambda_1)(u - \lambda_2) \cdots (u - \lambda_n)$ 在 $\mathcal{L}(E)$ 中是可逆的. 反之, 设 $q(u)$ 在 $\mathcal{L}(E)$ 中有逆元 v, 我们有

$$(u - \lambda_1)\alpha(u - \lambda_2) \cdots (u - \lambda_n)v = q(u)v = 1,$$

$$v\alpha(u - \lambda_2) \cdots (u - \lambda_n)(u - \lambda_1) = vq(u) = 1,$$

因此 $u-\lambda_1$ 可逆, 即 $\lambda_1 \notin \mathrm{Sp}\,u$. 同理有 $\lambda_2 \notin \mathrm{Sp}\,u, \cdots, \lambda_n \notin \mathrm{Sp}\,u$.

在此假设下, 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们记 $p-\lambda = q$. 我们有

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(p(u)) &\Leftrightarrow p(u)-\lambda \text{ 不可逆} \Leftrightarrow q(u) \text{ 不可逆}\\ &\Leftrightarrow q \text{ 在 } \mathrm{Sp}\,u \text{ 中有零点} \quad \text{(根据上文)}\\ &\Leftrightarrow p \text{ 在 } \mathrm{Sp}\,u \text{ 上取到 } \lambda\\ &\Leftrightarrow \lambda \in p(\mathrm{Sp}\,u).\end{aligned}$$

2.8.16 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 我们把 $x \in E$, $\|x\|=1$ 时 $(ux|x)$ 的全体可能值构成的集合记作 $W(u)$.

(i) 设 λ 是一个到 $W(u)$ 距离 >0 的复数, 那么 $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,u$, 且 $\|(u-\lambda)^{-1}\| \leqslant d^{-1}$;

(ii) $\mathrm{Sp}\,u$ 包含在 $W(u)$ 的闭包中.

(i) 在 u 上加上 $-\lambda$, 我们把问题归结到 $\lambda = 0$ 的情形. 这样对于任意满足 $\|x\|=1$ 的 $x \in E$ 我们有 $d \leqslant |(ux|x)|$; 因此, 对于任意的 $y \in E$,

$$d\|y\|^2 \leqslant |(uy|y)| \leqslant \|uy\|\|y\|,$$

这样

$$d\|y\| \leqslant \|uy\|. \tag{20}$$

这首先推出 u 是单射. 又因为对于任意的 $z \in E$, $(u^*z|z) = (uz|z)^*$, 我们有 $W(u^*) = W(u)^*$, 因此 0 到 $W(u^*)$ 的距离为 d. 从而 u^* 是单射, 所以 (根据 2.5.17(ii)) $\overline{\mathrm{Im}\,u} = E$.

现在来证明 $\mathrm{Im}\,u = E$. 设 $y \in E$. 存在 E 中序列 (x_n) 满足 $\|ux_n - y\| \to 0$. 这样当 $m, n \to +\infty$ 时 $\|ux_m - ux_n\| \to 0$, 因此根据 (20), 有 $\|x_m - x_n\| \to 0$, 从而 (x_n) 收敛于 E 中的一个元素 x. 我们有

$$ux = \lim ux_n = y,$$

因此 $y \in \mathrm{Im}\,u$, $\mathrm{Im}\,u = E$. 根据 2.6.1 和 2.6.2, $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, $\|u^{-1}\| \leqslant d^{-1}$.

(ii) 是 (i) 的直接推论.

2.9 线性算子的强收敛和弱收敛

2.9.1 我们先来回顾一些拓扑概念, 它们是 2.3.4 的推广. 设 X 是一个集合, C 是一个分离拓扑空间. 考虑以 X 为指标集的 C 的乘积 C^X; 这也就是从 X 到 C 的映射全体. 我们在其上赋予分离的乘积拓扑 $\mathscr{T}$. 这个拓扑也称为简单收敛拓扑. (若 A 是 C^X 的子集, A 上由 $\mathscr{T}$ 诱导的拓扑也称为简单收敛拓扑.)

(i) 设 $f \in C^X$. 我们可以根据下述方法构造 f 的一个邻域. 选取 X 中元素 $x_1, \cdots, x_n$, $f(x_1)$ 的一个邻域 $D_1, \cdots, f(x_n)$ 的一个邻域 D_n, 我们考虑满足

$$g(x_1) \in D_1, \cdots, g(x_n) \in D_n$$

的 $g \in C^X$ 构成的集合 $V_{x_1,\cdots,x_n,D_1,\cdots,D_n}$. 当 $x_1,\cdots,x_n$, $D_1,\cdots,D_n$ 变化时, $V_{x_1,\cdots,x_n,D_1,\cdots,D_n}$ 构成了 f 对于拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基本邻域系.

(ii) C^X 中的序列 $(f_1, f_2,\cdots)$ 收敛于 f 当且仅当对于任意的 $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.

(iii) 设 T 是一个拓扑空间, $t \mapsto \varphi_t$ 是 T 到 C^X 的映射. 为使这个映射是连续的, 必须且只需对于任意的 $x \in X$, T 到 C 的映射 $t \mapsto \varphi_t(x)$ 是连续的.

2.9.2 应用 2.9.1 于下述情形: X 是一个 Hilbert 空间 E, C 是具有强拓扑 (相应地, 弱拓扑) 的 Hilbert 空间 F, 而 $A = \mathcal{L}(E;F)$. 由此得到的 $\mathcal{L}(E;F)$ 上的分离拓扑称为**强拓扑** (相应地, **弱拓扑**).

2.9.3 设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 我们可以用下述方式构造 u 的一个强邻域: 选取 E 中元素 $x_1,\cdots,x_n$ 和一个 $\varepsilon > 0$, 我们考虑集合 $W_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$, 其元素为满足

$$\|vx_1 - ux_1\| \leqslant \varepsilon, \cdots, \|vx_n - ux_n\| \leqslant \varepsilon$$

的 $v \in \mathcal{L}(E;F)$. 由 2.9.1(i) 容易知道 $W_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$ 构成了 u 的一个基本强邻域系.

2.9.4 设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 我们可以用下述方式构造 u 的一个弱邻域: 选取 E 中元素 $x_1,\cdots,x_n$, F 中元素 $y_1,\cdots,y_n$ 和一个 $\varepsilon > 0$, 我们考虑集合 $Z_{x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n;\varepsilon}$, 其元素为满足

$$|(vx_1|y_1) - (ux_1|y_1)| \leqslant \varepsilon, \cdots, |(vx_n|y_n) - (ux_n|y_n)| \leqslant \varepsilon$$

的 $v \in \mathcal{L}(E;F)$. $Z_{x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n;\varepsilon}$ 构成了 u 的一个基本弱邻域系.

2.9.5 $\mathcal{L}(E;F)$ 中的序列 $(u_1, u_2,\cdots)$ 强收敛 (相应地, 弱收敛) 于 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 当且仅当对于任意的 $x \in E$, $u_n x$ 强收敛 (相应地, 弱收敛) 于 ux.

2.9.6 定理. *设 E, F 是 Hilbert 空间. 那么在 $\mathcal{L}(E;F)$ 上, 范数拓扑比强拓扑更为精细, 强拓扑比弱拓扑更为精细.*

设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 而 V 是 u 的强邻域. 那么 V 包含一个形如 2.9.3 中考虑的邻域 $W_{x_1,\cdots,x_n;\varepsilon}$. 设 V' 是 $\mathcal{L}(E;F)$ 中以 u 为中心, 半径 $\eta > 0$ 的闭球, 其中 η 满足

$$\eta\|x_1\| \leqslant \varepsilon, \cdots, \eta\|x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

这样 V' 是 u 的范数邻域, 且 $V' \subset V$, 因为若 $v \in V'$, 我们有, 对于任意的 $i = 1,\cdots,n$,

$$\|vx_i - ux_i\| \leqslant \|v - u\|\|x_i\| \leqslant \eta\|x_i\| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了定理的前半部分. 后半部分由 2.3.9 易得.

2.9.7 一般来说, 2.9.6 中考虑的三种拓扑是两两不同的; 然而当 E 和 F 都是有限维空间时, 它们是一致的 (留作习题).

2.9.8 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间. 若 $\mathcal{L}(E;F)$ 中的一列元素 (u_n) 弱收敛于 u, 我们有

$$\sup_n \|u_n\| < +\infty \quad 和 \quad \|u\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|.$$

对于任意的 $x \in E$, 我们 (根据 2.3.13) 有 $\sup\limits_n \|u_n x\| < +\infty$. 因此 (根据 2.2.4), $\sup\limits_n \|u_n\| < +\infty$. 而另一方面,

$$\begin{aligned}\|ux\| &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n x\| \quad (\text{根据 } 2.3.14)\\ &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|\|x\|\\ &= \|x\| \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|,\end{aligned}$$

因此

$$\|u\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|.$$

2.9.9 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间.

(i) 由 $\mathcal{L}(E;F)\times\mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(E;F)$ 的映射 $(u,v)\mapsto u+v$ 是强连续和弱连续的;

(ii) 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(F;E)$ 的映射 $u\mapsto u^*$ 是弱连续的;

(iii) 设 B 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的单位球. 那么由 $B\times B$ 到 B 的映射 $(u,v)\mapsto uv$ 是强连续的.

(i) 设 $x \in E$. 根据 2.9.1(iii), 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 F 的映射 $u \mapsto ux$ 对于强拓扑 (相应地, 弱拓扑) 是连续的. 因此由 $\mathcal{L}(E;F) \times \mathcal{L}(E;F)$ 到 F 的映射 $(u,v) \mapsto ux$, $(u,v) \mapsto vx$, $(u,v) \mapsto ux+vx = (u+v)x$ 对于强拓扑 (相应地, 弱拓扑) 都是连续的. 因此根据 2.9.1(iii), 由 $\mathcal{L}(E;F) \times \mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(E;F)$ 的映射 $(u,v) \mapsto u+v$ 是强连续 (相应地, 弱连续) 的.

(ii) 设 $x \in E$, $y \in F$. 根据 2.9.1(iii), 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 F 的映射 $u \mapsto ux$ 对于强拓扑 (相应地, 弱拓扑) 是连续的. 因此 (根据 2.3.4(iii)) 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $u \mapsto (ux|y)$. 而 $(ux|y) = (x|u^*y)$. 因此基于同样的理由, 由 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 E 的映射 $u \mapsto u^*y$ 和 $\mathcal{L}(E;F)$ 到 $\mathcal{L}(F;E)$ 的映射 $u \mapsto u^*$ 都是弱连续的.

(iii) 设 $x \in E$. 对于 u, v, u_0, $v_0 \in B$, 我们有

$$\begin{aligned}\|uvx - u_0v_0x\| &\leqslant \|u(v-v_0)x\| + \|(u-u_0)v_0x\|\\ &\leqslant \|u\|\|(v-v_0)x\| + \|(u-u_0)v_0x\|\\ &\leqslant \|(v-v_0)x\| + \|(u-u_0)v_0x\|.\end{aligned}$$

因此, 若 $\|(v-v_0)x\| \leqslant \varepsilon$, $\|(u-u_0)v_0x\| \leqslant \varepsilon$, 我们有 $\|uvx - u_0v_0x\| \leqslant 2\varepsilon$. 我们得到: 由 $B\times B$ 到 E 的映射 $(u,v)\mapsto uvx$ 是强连续的. 因此 (2.9.1(iii)), 由 $B\times B$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射 $(u,v)\mapsto uv$ 是强连续的.

III 特殊的线性算子类

3.1 正常算子[①]

3.1.1 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, 而 $u \in \mathcal{L}(E)$. 则下述条件等价:

(i) $uu^* = u^*u$;

(ii) 对于任意的 $x \in E$, $\|ux\| = \|u^*x\|$.

设 $x \in E$. 我们有 $\|ux\|^2 = (ux|ux) = (u^*ux|x)$ 和 $\|u^*x\|^2 = (uu^*x|x)$. 因此

$$\begin{aligned}\text{对任意的 } x,\ \|ux\| = \|u^*x\| &\Leftrightarrow \text{对任意的 } x,\ (u^*ux|x) = (uu^*x|x) \\ &\Leftrightarrow u^*u = uu^* \quad (\text{根据 1.1.6 和 2.1.10}).\end{aligned}$$

3.1.2 定义. 设 E 是 Hilbert 空间. $\mathcal{L}(E)$ 的一个元素称为是正常的, 若它满足 3.1.1 中条件.

3.1.3 例. 我们利用例 2.1.11 中记号. 根据 2.5.3, 对于任意的 i, 我们有 $u^*e_i = \overline{\alpha_i}e_i$, 因此 $uu^*e_i = \alpha_i\overline{\alpha_i}e_i = u^*ue_i$, 所以 $uu^* = u^*u$.

3.1.4 例. 我们利用例 2.1.13 中记号. 根据 2.5.5, 我们有 $(u_f)^* = u_{\bar{f}}$, 因此 $u_f(u_f)^* = u_{f\bar{f}} = (u_f)^*u_f$.

3.1.5 显然, 如果 u 是正常的, 那么 u^* 是正常的, 且对于任意多项式 $p \in \mathbb{C}[X]$, $p(u)$ 也是正常的.

3.1.6 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 中正常元素, $x \in E$ 且 $\lambda \in \mathbb{C}$. 下述条件是等价的:

---

①译者注: 称 “正常算子” 或 “正规算子” 均可.

(i) x 是 u 的对应于特征值 λ 的特征向量;

(ii) x 是 u^* 的对应于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

因为 $u-\lambda$ 是正常的, 对于任意 $y \in E$, 我们有 $\|(u-\lambda)y\| = \|(u^*-\bar{\lambda})y\|$; 由此可知 $\mathrm{Ker}(u-\lambda) = \mathrm{Ker}(u^*-\bar{\lambda})$, 即得定理.

3.1.7 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 中正常元素. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 设 E_λ 是相应的特征子空间. 那么若 $\lambda \neq \mu$, 则 E_λ 和 E_μ 是正交的.

设 $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$. 我们有

$$\begin{aligned}\lambda(x|y) &= (\lambda x|y) = (ux|y) = (x|u^*y)\\ &= (x|\overline{\mu}y) \quad (\text{根据 } 3.1.6)\\ &= \mu(x|y),\end{aligned}$$

根据 $\lambda \neq \mu$ 即得 $(x|y) = 0$.

3.1.8 推论 1. 设 $F = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} E_\lambda$, G 是 F 的闭包.

(i) Hilbert 空间 G 是 E_λ 的 Hilbert 和;

(ii) G 化简 u;

(iii) $u|_{G^\perp}$ 没有任何特征值.

(i) 根据 G 的构造, E_λ 的并集在 G 中是完全的. 而另一方面, 根据 3.1.7, E_λ 是两两正交的.

(ii) (根据 3.1.6) 每一个 E_λ 对于 u 和 u^* 都是稳定的, 因此 G 对于 u 和 u^* 都是稳定的.

(iii) 设 $x \in G^\perp$ 是 $u|_{G^\perp}$ 的一个特征向量. 这样 x 是 u 的一个特征向量, 因此 $x \in G$. 因为 $x \in G \cap G^\perp$, 我们有 $x = 0$.

3.1.9 推论 2. 设 E 是可数型 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的正常元. 那么 u 的点谱是可数的.

根据 1.7.10, E 的任意标准正交子集都是可数的. 因此, 利用 3.1.7 中的符号, 所有非零的 E_λ 构成的族是可数的.

3.1.10 推论 3.1.8 把对于正常线性算子的研究化简为对于没有特征值的正常线性算子的研究. 但这种简化有时候是无效的, 因为根据 3.1.8 中的记号, 我们很可能会有 $G = 0$ (参见 2.7.5). (不过读者还是可以比照 4.3.2 以加深对这一点的理解.)

3.1.11 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的正常元. 我们有

$$\mathrm{Ker}\, u = (\mathrm{Im}\, u)^\perp, \quad \overline{\mathrm{Im}\, u} = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp.$$

因为 $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^*$, 由 2.5.17 即得结论.

3.1.12 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的正常元. u 的谱半径等于 $\|u\|$.

对任意的 $x \in E$, 我们有 $\|u^2x\| = \|u(ux)\| = \|u^*(ux)\|$, 因此根据 2.5.11 有 $\|u^2\| = \|u^*u\| = \|u\|^2$. 归纳可得

$$\left\|u^{2^n}\right\| = \|u\|^{2^n},$$

因此 $\|u^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|u\|$. 当 $n \to +\infty$ 时即得定理.

3.1.13 推论. 设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的正常元. 我们有

$$\|u\| = \sup_{z \in \operatorname{Sp} u} |z| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(ux|x)|.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \operatorname{Sp} u} |z| &\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(ux|x)| \quad (\text{根据 } 2.8.16) \\ &\leqslant \|u\| \\ &\leqslant \sup_{z \in \operatorname{Sp} u} |z| \quad (\text{根据 } 2.8.9 \text{ 和 } 3.1.12). \end{aligned}$$

3.2 Hermite 算子[①]

3.2.1 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 下述条件是等价的:

(i) $E \times E$ 上的半双线性型 $(x, y) \mapsto (ux|y)$ 是 Hermite 的;

(ii) 对于任意的 $x, y \in E$, 有 $(ux|y) = (x|uy)$;

(iii) 对于任意的 $x \in E$, $(ux|x)$ 是实数;

(iv) $u = u^*$.

若 M 是 u 对于 E 的一组标准正交基的矩阵, 则这些条件还等价于

(v) M 是 Hermite 矩阵.

条件 (i) 意味着对于任意的 $x, y \in E$, 有 $(ux|y) = \overline{(uy|x)}$, 由此得到它和 (ii) 等价. 根据 1.2.5, 我们知道 (ii)⇔(iii). 条件 (ii) 的另一种写法是对于任意的 $x, y \in E$, 有 $(ux|y) = (u^*x|y)$, 因此根据 2.4.3, 它和条件 (iv) 等价. 最后和条件 (v) 的等价性由 2.5.3 得到.

3.2.2 定义. 满足 3.2.1 中条件的线性算子称为 Hermite算子, 或者称为自共轭算子[②].

---

①译者注: 原文是 “endomorphisme”, 意思是从一个 Hilbert 空间到自身的 (有界) 线性算子.

②译者注: 也可以称为自伴算子.

3.2.3 例. 取例 2.1.11 中的记号. 根据 2.5.3, 为使 $u = u^*$, 必须且只需对于任意的 $i \in I$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

3.2.4 例. 取例 2.1.13 中的记号. 我们有

$$\begin{aligned} u_f \text{ 是 Hermite 的} &\Leftrightarrow u_f = u_{\bar{f}} \quad (\text{根据 } 2.5.5) \\ &\Leftrightarrow u_{f-\bar{f}} = 0 \quad (\text{根据 } 2.1.13) \\ &\Leftrightarrow f - \bar{f} = 0 \text{ 几乎处处成立} \quad (\text{根据 2.1.13 中的等式 (9)}) \\ &\Leftrightarrow f \text{ 几乎处处都是实数.} \end{aligned}$$

3.2.5 例. 取例 2.1.14 中的记号, 并设 $\Delta = \Delta'$. 若在 $\Delta \times \Delta$ 上几乎处处有

$$K(t, t') = \overline{K(t', t)},$$

则由 2.5.6 可知 v_K 是 Hermite 的. (逆命题也是成立的, 参见 4.2.9.)

3.2.6 设 E 是有限维 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元. 我们知道存在 E 的标准正交基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 和实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 使得对于任意的 i 都有 $ue_i = \lambda_i e_i$. 这门课的目的就是在适当的范围内将这个结果推广到无限维. 从 3.2.4 和 2.7.5 我们已经知道需要对于命题的陈述作相当大的改动.

3.2.7 一个 Hermite 算子显然是正常的, 因此 3.1 中的结论在这里都成立.

3.2.8 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, f 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元, F 是 E 的闭线性子空间. 为使 F 化简 h, 必须且只需 F 在 h 下稳定.*

因为 $h^* = h$, 这是显然的.

3.2.9 定理. *设 E 是 Hilbert 空间.*

(i) 若 $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(E)$ 是 Hermite 元, 则 $h_1 + h_2$ 也是 Hermite 元;

(ii) 若 $h \in \mathcal{L}(E)$ 是 Hermite 元, 而 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 λh 是 Hermite 元;

(iii) 若 $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(E)$ 是 Hermite 元, 则当且仅当 $h_1 h_2 = h_2 h_1$ 时 $h_1 h_2$ 是 Hermite 元;

(iv) 若 $h \in \mathcal{L}(E)$ 是 Hermite 元, 而 $p \in \mathbb{R}[X]$, 则 $p(h)$ 是 Hermite 元;

(v) $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元全体构成一个弱闭集;

(vi) Hermite 算子的 Hilbert 和也是 Hermite 算子.

结论 (i) 由 $(h_1 + h_2)^* = h_1^* + h_2^*$ 可得. 结论 (ii) 可由 $(\lambda h)^* = \bar{\lambda} h^*$ 得到. 结论 (iii) 可由 $(h_1 h_2)^* = h_2^* h_1^*$ 得到. 结论 (iv) 是 (i), (ii) 和 (iii) 的推论. 结论 (v) 是 2.9.9(ii) 的推论. 结论 (vi) 是 2.5.17 的推论.

3.2.10 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$.

(i) 存在唯一确定的 Hermite 元 $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$, 使得 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$;

(ii) 我们有

$$u_1 = \frac{1}{2}(u + u^*), \quad u_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(u - u^*);$$

(iii) 为使 u 是正常元, 必须且只需 $u_1u_2 = u_2u_1$.

定义

$$u_1 = \frac{1}{2}(u + u^*), \quad u_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(u - u^*).$$

我们有

$$u_1 + \mathrm{i}u_2 = \frac{1}{2}(u + u^*) + \frac{1}{2}(u - u^*) = u,$$

$$u_1^* = \frac{1}{2}(u^* + u) = u_1, \quad u_2^* = -\frac{1}{2\mathrm{i}}(u^* - u) = u_2.$$

若 $\mathcal{L}(E)$ 的 Hermite 元 u_1' 和 u_2' 满足 $u = u_1' + \mathrm{i}u_2'$, 我们有 $u^* = u_1'^* - \mathrm{i}u_2'^* = u_1' - \mathrm{i}u_2'$, 因此

$$\frac{1}{2}(u + u^*) = u_1', \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(u - u^*) = u_2'.$$

这样我们就证明了结论 (i) 和 (ii). 由下面的等式就可以得到结论 (iii):

$$uu^* - u^*u = (u_1 + \mathrm{i}u_2)(u_1 - \mathrm{i}u_2) - (u_1 - \mathrm{i}u_2)(u_1 + \mathrm{i}u_2) = 2\mathrm{i}(u_2u_1 - u_1u_2).$$

3.2.11 在许多 (例如量子力学) 问题中, Hilbert 空间上的算子是复数的自然推广 (事实上, 在 1 维的情形这两者本身就是重合的). 算子的共轭运算就是复共轭的类比. 这样 Hermite 算子对应的就是实数. 基于这种理由, 利用 3.2.10 中的记号, 我们通常称 u_1 是 u **的实部**, 而 u_2 是 u **的虚部**.

3.3 Hermite 算子之间的序

3.3.1 定义. 设 E 是 Hilbert 空间, h 和 k 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元. 我们记 $h \leqslant k$ (或者 $k \geqslant h$), 若对于任意的 $x \in E$, 都有

$$(hx|x) \leqslant (kx|x).$$

3.3.2 立即可得通过上述方式我们定义了 $\mathcal{L}(E)$ 中 Hermite 元集合上的一个 (偏) 序关系. $\mathcal{L}(E)$ 中满足 $h \geqslant 0$ 的 Hermite 元 h 称作是正 (定) 的. 我们有

$$k \geqslant h \Leftrightarrow k - h \geqslant 0.$$

在 3.2.11 所提到的类比中, 正定 Hermite 元对应的实数 $\geqslant 0$.

3.3.3 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 若对于任意的 $x \in E$ 都有 $(ux|x) \geqslant 0$, 则 (根据 3.2.1 的条件 (iii)) u 是 Hermite 元, 且显然 u 是正的. 因此, 称 u 是正 Hermite 元, 也就是说, $E \times E$ 上的半双线性型 $(x, y) \mapsto (ux|y)$ 是 (半) 正定 Hermite 型.

3.3.4 定理. 设 E 是 Hilbert 空间.

(i) 若 h, k, h' 和 k' 是 $\mathcal{L}(E)$ 中满足 $h \leqslant k, h' \leqslant k'$ 的 Hermite 元, 则 $h+h' \leqslant k+k'$;

(ii) 若 h 和 k 是 $\mathcal{L}(E)$ 中满足 $h \leqslant k$ 的 Hermite 元, 而 $\lambda \leqslant 0$, 则 $\lambda h \geqslant \lambda k$;

(iii) $\mathcal{L}(E)$ 中的正 Hermite 元全体构成的集合是弱闭的;

(iv) 若 $u \in \mathcal{L}(E)$, 则 u^*u 和 uu^* 是正 Hermite 元;

(v) 若 h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元, 则 h^2 是正 Hermite 元.

结论 (i) 和 (ii) 是显然的.

对于 $x, y \in E$, 由 $\mathcal{L}(E)$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $u \mapsto (ux|y)$ 是弱连续的. 因此, 对于任意的 $x \in E$, 满足 $(ux|x) \geqslant 0$ 的 $u \in \mathcal{L}(E)$ 全体构成一个弱闭集. (iii) 中考虑的集合就是一族闭集的交, 从而是弱闭的.

若 $u \in \mathcal{L}(E)$, 我们有, 对于任意的 $x \in E$,

$$(u^*ux|x) = \|ux\|^2 \geqslant 0, \quad (uu^*x|x) = \|u^*x\|^2 \geqslant 0,$$

即得 (iv). 结论 (v) 是 (iv) 的推论.

3.3.5 设 h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元. 若 $E \neq \{0\}$, 我们定义

$$\boxed{M_h = \sup_{\|x\|=1} (hx|x), \quad m_h = \inf_{\|x\|=1} (hx|x).}$$

那么 M_h 和 m_h 是有限实数. 我们马上可以得到

$$M_{-h} = -m_h, \quad m_{-h} = -M_h.$$

3.3.6 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元.

(i) M_h 是满足 $h \leqslant M$ 的最小实数 M;

(ii) m_h 是满足 $m \leqslant h$ 的最大实数 m.

设 $y \in E$. 存在 $x \in E$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\|x\| = 1$ 且 $y = \lambda x$. 则

$$(hy|y) = \lambda\bar{\lambda}(hx|x) \leqslant \lambda\bar{\lambda}M_h = \lambda\bar{\lambda}(M_hx|x) = (M_hy|y),$$

因此 $h \leqslant M_h$. 设 M 是一个满足 $h \leqslant M$ 的实数. 对于满足 $\|x\| = 1$ 的任意 $x \in E$, 我们有

$$(hx|x) \leqslant (Mx|x) = M,$$

因此 $M_h \leqslant M$. 这样就得到了 (i). 把 h 换成 $-h$ 即得到 (ii).

3.3.7　例. 取例 2.1.11 中记号, 并假设对于任意的 i, α_i 都是实数, 这样 (根据 3.2.3) u 是 Hermite 元. 我们有

$$u \geqslant 0 \Leftrightarrow \text{对于任意的 } i \in I,\ \alpha_i \geqslant 0.$$

事实上, 若 $u \geqslant 0$, 则对于任意的 i, 我们有 $\alpha_i = (ue_i|e_i) \geqslant 0$. 反之, 假设对于任意的 i, $\alpha_i \geqslant 0$. 设 $x = (\lambda_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, 我们有

$$(ux|x) = \sum_{i\in I} \alpha_i \lambda_i \overline{\lambda_i} \geqslant 0,$$

因此 $u \geqslant 0$.

从而我们就得到, 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$u \leqslant \alpha \Leftrightarrow \text{对于任意的 } i \in I, \alpha_i \leqslant \alpha.$$

所以,

$$M_u = \sup_{i\in I} \alpha_i.$$

同理可得

$$m_u = \inf_{i\in I} \alpha_i.$$

3.3.8　例. 取例 2.1.13 中的记号, 并设 f 几乎处处是实的, 这样 (根据 3.2.4) u_f 是 Hermite 元. 我们有

$$u_f \geqslant 0 \Leftrightarrow \text{几乎处处都成立 } f(t) \geqslant 0.$$

事实上, 假设几乎处处都有 $f(t) \geqslant 0$. 对于任意的 $g \in L^2(\Delta)$, 我们有

$$(u_f g|g) = \int_\Delta f(t)g(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

反之, 假设 $u_f \geqslant 0$. 对于任意整数 $n > 0$, 以 A_n 记满足 $f(t) \leqslant -\dfrac{1}{n}$ 的全体 $t \in \Delta$ 构成的集合. 我们来证明 A_n 是零测度集. 如果不是这样, A_n 就包含了一个具有有限测度 $r > 0$ 的可测集; 设 g 是这个集合的特征函数; 我们有 $g \in L^2(\Delta)$ 且

$$0 \leqslant (u_f g|g) = \int_\Delta f(t)g(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{1}{n}\int_\Delta |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = -\frac{r}{n},$$

这显然是不可能的.

所以, 全体 A_n (对于 $n = 1, 2, \cdots$) 的并集 A 就是零测度的. 对于 $t \in \Delta \setminus A$, 我们有, 对于任意的 n, $f(t) > -\dfrac{1}{n}$, 因此 $f(t) \geqslant 0$.

由此, 若 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则

$$u_f \leqslant \alpha \Leftrightarrow \text{几乎处处都成立} f(t) \leqslant \alpha.$$

因此 M_{u_f} 是 f 的本性上确界. 同理 m_{u_f} 是 f 的本性下确界.

3.3.9　定理. 设 E 是 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 中元素.

(i) 我们有 $\operatorname{Sp} h \subset [m_h, M_h]$;

(ii) 我们有 $\|h\| = \sup(|m_h|, |M_h|)$;

(iii) 设 u_1, u_2 分别是 u 的实部和虚部, 那么, 当我们把 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 等同起来的时候, $\operatorname{Sp} u \subset [m_{u_1}, M_{u_1}] \times [m_{u_2}, M_{u_2}]$.

由 2.8.16(ii) 即可得 (i); 同理, 利用 $\|x\| = 1$ 时我们有关系式

$$(ux|x) = (u_1x|x) + \mathrm{i}(u_2x|x) \in [m_{u_1}, M_{u_1}] \times [m_{u_2}, M_{u_2}],$$

即可得 (iii). 现在来证明 (ii). 设 $\|x\| = 1$, 我们有 $|(hx|x)| \leqslant \|h\|$; 因此 $|m_h| \leqslant \|h\|$, $|M_h| \leqslant \|h\|$. 剩下要证明

$$\|h\| \leqslant \sup(|m_h|, |M_h|). \tag{1}$$

根据 3.1.13, 存在 $\lambda \in \operatorname{Sp} h \subset [m_h, M_h]$, 使得 $\|h\| = |\lambda|$. 把 h 换成 $-h$ (这样做不改变 (1) 中的任何一个量), 我们可以假设 $\|h\| = \lambda$, 即得

$$\|h\| \leqslant M_h \leqslant |M_h| \leqslant \sup(|m_h|, |M_h|).$$

3.4　投影

3.4.1　定理. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 下述条件是等价的:

(i) $u = u^* = u^2$;

(ii) 存在 E 的闭线性子空间 F 使得 $u = P_F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 由 1.6.9(iii) 和 (iv) 可知 $P_F^2 = P_F$. 另一方面, 若 x, $y \in E$, 我们有 $x - P_Fx \in F^\perp$, $y - P_Fy \in F^\perp$, 因此

$$(P_Fx|y) = (P_Fx|P_Fy) = (x|P_Fy), \tag{2}$$

因此 $P_F = P_F^*$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): 假设 $u = u^* = u^2$. 设 $G = \operatorname{Ker} u$ 而 $F = G^\perp$. 因为 $u = u^*$, 我们有 (根据 2.5.17(iv)) $F = \overline{\operatorname{Im} u}$. 由于 $u = u^2$, 对于任意的 $y \in \operatorname{Im} u$, 都有 $uy = y$, 因此根据连续性, 这对于任意的 $y \in F$ 都成立. 这样, u 在 G 和 F 上都和 P_F 重合, 所以在 $G + F = E$ 上也和 P_F 重合.

3.4.2　定义. 满足 3.4.1 中条件的算子称为投影.

(有时候我们会在更广的意义下使用 “投影” 这个词. 在那种情况下我们称满足 3.4.1 中条件的算子是 “正交投影”.)

3.4.3　设 p 是 E 中投影, 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$(px|x) = \|px\|^2.$$

(这是 (1) 的特例.) 由此我们得到 $p \geqslant 0$.

3.4.4　**定理.**　设 E 是 Hilbert 空间, 而 $u = P_F$, $v = P_G$ 是 E 中投影. 下述条件是等价的:

(i) $uv = 0$;

(ii) $vu = 0$;

(iii) F 和 G 是正交的.

如果这些条件成立, 那么 $F + G$ 是 E 的闭线性子空间, 且 $u + v = P_{F+G}$.

我们有 $(vu)^* = u^*v^* = uv$, 因此

$$uv = 0 \Leftrightarrow vu = 0.$$

假设 $uv = 0$. 设 $y \in G$, 我们有

$$P_F y = P_F P_G y = uvy = 0,$$

从而有 $y \in F^{\perp}$. 因此 F 和 G 正交.

设 F 和 G 正交, 而 $x \in E$. 我们有 $vx \in G$, 所以 $uvx = 0$. 这样 $uv = 0$.

假设 $uv = vu = 0$. 这样

$$(u + v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2 = u + v, \quad 且 \quad (u + v)^* = u + v,$$

因此 $u + v$ 是一个投影. 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$(u + v)x = ux + vx \in F + G,$$

因此 $\mathrm{Im}(u + v) \subset (F + G)$. 若 $y \in F$, 我们有

$$(u + v)y = uy = y,$$

因此 $F \subset \mathrm{Im}(u + v)$; 同理 $G \subset \mathrm{Im}(u + v)$, 这样最后我们得到 $\mathrm{Im}(u + v) = F + G$.

3.4.5　**定理.**　设 E 是 Hilbert 空间, 而 $u = P_F$, $v = P_G$ 是 E 中投影. 下述条件是等价的:

(i) $u \leqslant v$;

(ii) $uv = u$;

(iii) $vu = u$;

(iv) $F \subset G$.

如果这些条件成立, 那么 $v - u$ 是投影 $P_{G \ominus F}$.

(i)⇒(ii): 设 $u \leqslant v$. 根据 3.4.3, 对于任意的 $x \in E$, 我们有 $\|ux\| \leqslant \|vx\|$, 因此

$$\operatorname{Ker} u \supset \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im}(1-v).$$

对于任意的 $y \in E$, 我们有 $u(1-v)y = 0$. 这样, $u(1-v) = 0$, 即 $u = uv$.

(ii)⇒(iii): 若 $uv = u$, 则 $u = u^* = v^*u^* = vu$.

(iii)⇒(iv): 若 $vu = u$, 则对于任意的 $x \in F$,

$$x = ux = vux \in v(E) = G;$$

因此 $F \subset G$.

(iv)⇒(i): 设 $F \subset G$. 这样 G 是 F 和 $G \ominus F$ 的 Hilbert 和. 根据 3.4.4, 我们有 $P_G = P_F + P_{G\ominus F}$, 即

$$P_{G\ominus F} = v - u.$$

这就 (根据 3.4.3) 导出 $v - u \geqslant 0$, 即 $v \geqslant u$. 同时我们也证明了定理的最后一个结论.

3.4.6 设 E 是 Hilbert 空间, $\mathscr{P}$ 是 E 中全体投影算子构成的集合, 其上有偏序 $\leqslant$; $\mathscr{S}$ 是 E 的全体闭线性子空间构成的集合, 其上有偏序 $\subset$. 根据 3.4.5, 映射 $F \mapsto P_F$ 是从 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{P}$ 的同构. 这样可以使偏序集 $\mathscr{P}$ 上的很多性质更为明显. 例如, $\mathscr{P}$ 以 0 为最小元, 1 为最大元. $\mathscr{P}$ 中的任意一族元素 $(P_{F_i})_{i\in I}$ 具有下确界, 即对应于 $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ 的 P_F; 也具有上确界, 即对应于 $F' = \overline{\sum_{i\in I} F_i}$ 的 $P_{F'}$.

3.4.7 定理. *设 E 是 Hilbert 空间, 而 $u = P_F$, $v = P_G$ 是 E 中投影. 下述条件是等价的:*

(i) u 和 v 是可交换的;

(ii) uv 是投影;

(iii) $F \ominus (F\cap G)$ 和 $G \ominus (F \cap G)$ 正交.

如果这些条件成立, 那么有 $uv = P_{F\cap G}$.

记 $F_1 = F \ominus (F\cap G)$, $G_1 = G \ominus (F\cap G)$.

(i)⇒(iii): 设 $uv = vu$. 设 $x \in F_1$, 我们有 $vx \in G$, 同时

$$vx = v(ux) = u(vx) \in F;$$

因此 $vx \in F \cap G$, 这样就得到 $\|vx\|^2 = (vx|x) = 0$; 即 x 和 G 正交. 所以 F_1 和 G 正交, 从而也和 G_1 正交.

(iii)⇒(ii): 设 F_1 和 G_1 正交, 那么 $F_1, G_1, F\cap G$ 两两正交. 根据 3.4.4, 我们有 $u = P_{F_1} + P_{F\cap G}, v = P_{G_1} + P_{F\cap G}$, 且

$$uv = P_{F_1}P_{G_1} + P_{F_1}P_{F\cap G} + P_{F\cap G}P_{G_1} + P_{F\cap G}P_{F\cap G} = P_{F\cap G}.$$

(ii)⇒(i): 若 uv 是投影, 则有 $uv = (uv)^* = v^*u^* = vu$.

3.4.8 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一族 Hilbert 空间, $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$. 设对于任意的 $i \in I$, u_i 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个元素, 并假设 $\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty$. 设 $u = \bigoplus_{i\in I} u_i$. 那么根据 2.5.16 和 2.2.9, 我们有

$$u \text{ 是一个投影} \Leftrightarrow \text{对于任意的 } i \in I,\ u_i \text{ 是一个投影}.$$

在此情形下, 设 $u = P_F$, $u_i = P_{F_i}$. 这样

$$F = \bigoplus_{i\in I} F_i.$$

事实上, 设 $x \in E$, 记 $x = (x_i)_{i\in I}$, 其中对于任意的 $i \in I$, $x_i \in E_i$. 我们有

$$\begin{aligned} x \in F \Leftrightarrow ux = x &\Leftrightarrow \text{对于任意的 } i \in I,\ u_i x_i = x_i \\ &\Leftrightarrow \text{对于任意的 } i \in I,\ x_i \in F_i. \end{aligned}$$

3.4.9 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$, F 是 E 的闭线性子空间.

(i) 为使 F 在 u 下稳定, 必须且只需 $P_F u P_F = u P_F$;

(ii) 为使 F 化简 u, 必须且只需 $P_F u = u P_F$.

(i) 假设 F 在 u 下稳定. 设 $x \in E$. 我们有 $P_F x \in F$, 所以 $uP_F x \in F$, 即 $P_F(uP_F x) = uP_F x$. 我们得到 $P_F u P_F = u P_F$. 假设 $P_F u P_F = u P_F$. 这样

$$u(F) = uP_F(E) = P_F u P_F(E) \subset F.$$

(ii) 设 F 化简 u, F 在 u 和 u^* 下稳定, 因此, 根据 (i):

$$P_F u P_F = u P_F, \quad P_F u^* P_F = u^* P_F.$$

第二个等式两边取共轭, 就得到 $P_F u P_F = P_F u$. 我们得到 $P_F u = u P_F$.

假设 $P_F u = u P_F$, 取共轭可以得到 $u^* P_F = P_F u^*$. 因此

$$u(F) = uP_F(E) = P_F u(E) \subset F,$$

同理, $u^*(F) \subset F$.

3.4.10 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$, E_1 (相应地, F_1) 是 u (相应地, u^*) 的支撑子空间. 这时 $s = P_{E_1}$ 称为 u 的**支撑**. 设 $t = P_{F_1}$ 是 u^* 的支撑.

定理. (i) s 是满足 $up = u$ 的最小的 $p \in \mathcal{L}(E)$;

(ii) t 是满足 $qu = u$ 的最小的 $q \in \mathcal{L}(F)$.

(i) 设 G 是 E 的闭线性子空间, 且 $p = P_G$. 我们有

$$\begin{aligned} up = u \Leftrightarrow u(1-p) = 0 \Leftrightarrow uP_{G^\perp} = 0 \Leftrightarrow u(G^\perp) = 0 \\ \Leftrightarrow G^\perp \subset \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow G \supset E_1 \Leftrightarrow p \geqslant s. \end{aligned}$$

(ii) 设 q 是 F 中的投影. 根据 (i) 我们有

$$qu = u \Leftrightarrow u^*q = u^* \Leftrightarrow q \geqslant t.$$

3.5 恒等映射的分解

3.5.1 设 E 是 Hilbert 空间. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 设 F_λ 是 E 的闭线性子空间, 设 p_λ 是 E 中投影. 很自然地, 族 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (相应地, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$) 称作递增的, 若对于任意的 $\lambda \leqslant \mu$, 有 $F_\lambda \subset F_\mu$ (相应地, $p_\lambda \leqslant p_\mu$). 为使族 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是递增的, 必须且只需 (根据 3.4.5) 族 $(p_{F_\lambda})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是递增的. 因此在递增闭线性子空间族和递增投影族之间存在着一个明显的一一对应.

为使族 $(p_{F_\lambda})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是递增的, 必须且只需对于任意的 $x \in E$, 函数 $\lambda \mapsto (p_\lambda x|x) = \|p_\lambda x\|^2$ 是递增的.

研究这些递增族的意义将在第 V 章中阐明.

3.5.2 设 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 的一族递增闭线性子空间. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们定义

$$F_{\lambda-} = \overline{\bigcup_{\lambda'<\lambda} F_{\lambda'}}.$$

我们有 $F_{\lambda-} \subset F_\lambda$.

设 $p_\lambda = P_{F_\lambda}$. 我们定义

$$p_{\lambda-} = \sup_{\lambda'<\lambda} p_{\lambda'}.$$

我们有 $p_{\lambda-} \leqslant p_\lambda$. 根据 3.4.6, 我们知道 $p_{\lambda-} = P_{F_{\lambda-}}$.

3.5.3 定理. 保留前述记号.

(i) 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$(p_{\lambda-}x|x) = \sup_{\lambda'<\lambda}(p_{\lambda'}x|x) = \lim_{\lambda'\to\lambda,\lambda'<\lambda}(p_{\lambda'}x|x);$$

(ii) $p_{\lambda-}$ 是 $p_{\lambda'}$ 在 $\lambda' \to \lambda$, $\lambda' < \lambda$ 时的强极限.

设 $x \in E$ 和 $F_{\lambda-}$ 正交, 那么对于任意的 $\lambda' < \lambda$, x 和 $F_{\lambda'}$ 正交, 因此 $p_{\lambda-}x = p_{\lambda'}x = 0$. 若 $x \in F_{\lambda-}$, 而 $\varepsilon > 0$, 则存在 $y \in \bigcup_{\lambda'<\lambda} F_\lambda$, 使得 $\|x-y\| \leqslant \varepsilon$; 存在 $\mu < \lambda$ 使得 $y \in F_\mu$; 这样, 设 $\mu \leqslant \lambda' < \lambda$, 我们有

$$\begin{aligned}\|p_{\lambda-}x - p_{\lambda'}x\| &= \|x - p_{\lambda'}x\| \quad (\text{因为 } x \in F_{\lambda-})\\ &\leqslant \|x-y\| \quad (\text{因为 } y \in F_{\lambda'})\\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

由线性性, 我们知道, 对于任意的 $x \in E$, 当 $\lambda' \to \lambda$, $\lambda' < \lambda$ 时 $p_{\lambda'}x$ 依范数收敛于 $p_{\lambda-}x$. 这就证明了 (ii), 同时也证明了

$$(p_{\lambda-}x|x) = \lim_{\lambda' \to \lambda, \lambda' < \lambda} (p_{\lambda'}x|x).$$

因为函数 $\mu \mapsto (p_\mu x|x)$ 是递增的, 所以等式右端等于 $\sup\limits_{\lambda' < \lambda} (p_{\lambda'}x|x)$.

3.5.4 还是利用同样的记号, 定义

$$F_{\lambda+} = \bigcap_{\lambda' > \lambda} F_{\lambda'} \supset F_\lambda, \quad p_{\lambda+} = \inf_{\lambda' > \lambda} p_{\lambda'} \geqslant p_\lambda.$$

我们有 $p_{\lambda+} = P_{F_{\lambda+}}$.

3.5.5 定理. 保留前述记号.

(i) 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$(p_{\lambda+}x|x) = \inf_{\lambda' > \lambda} (p_{\lambda'}x|x) = \lim_{\lambda' \to \lambda, \lambda' > \lambda} (p_{\lambda'}x|x);$$

(ii) $p_{\lambda+}$ 是 $p_{\lambda'}$ 在 $\lambda' \to \lambda$, $\lambda' > \lambda$ 时的强极限.

如果我们记 $q_\lambda = 1 - p_{-\lambda}$, 那么 $(q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 是一族递增的投影, 只需对它们应用 3.5.3 即可.

3.5.6 我们称族 $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ **在 λ_0 是右连续的**, 若 $F_{\lambda_0+} = F_{\lambda_0}$. 这个族称作**右连续的**, 若它在 $\mathbb{R}$ 的每一点是右连续的. 我们用类似方法定义**左连续性**. 若 $F_{\lambda_0-} \neq F_{\lambda_0+}$, 那么我们称 λ_0 是 $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 的**间断点**.

对于族 $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 我们也有相应的概念.

3.5.7 我们定义:

$$F_{+\infty} = \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} F_\lambda}, \quad F_{-\infty} = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} F_\lambda,$$
$$p_{+\infty} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} p_\lambda, \quad p_{-\infty} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} p_\lambda.$$

我们有 $p_{+\infty} = P_{F_{+\infty}}$, $p_{-\infty} = P_{F_{-\infty}}$. 如同在 3.5.3 中那样, 对于任意的 $x \in E$,

$$(p_{+\infty}x|x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (p_\lambda x|x) = \lim_{\lambda \to +\infty} (p_\lambda x|x),$$

且 $p_{+\infty}$ 是 p_λ 在 $\lambda \to +\infty$ 时的强极限. 类似可得对于 $p_{-\infty}$ 的结论.

3.5.8 定义. 设 E 是 Hilbert 空间. E 的一个分解指的是一个满足 $F_{+\infty} = E$, $F_{-\infty} = 0$ 的右连续递增闭线性子空间族 $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$. id_E 的一个分解指的是一个满足 $p_{+\infty} = \mathrm{id}_E$, $p_{-\infty} = 0$ 的右连续递增投影族 $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

3.5.9 例. 设 E 是具有有限维数 n 的 Hilbert 空间. 设 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 的一个分解. 定义 $d_\lambda = \dim F_\lambda$. 函数 d 在 $\mathbb{R}$ 上递增, 且它的值只能为 $0, 1, \cdots, n$. 以 I_k 记满足 $d(\lambda) = k$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 构成的集合. 这是一个线段. 这样 $\mathbb{R}$ 就是 $I_0, I_1, \cdots, I_n$ 的无交并. 若 $\lambda, \mu \in I_k$, 且 $\lambda \leqslant \mu$, 我们有 $F_\lambda \subset F_\mu$ 且 $d(\lambda) = d(\mu)$. 因此 $F_\lambda = F_\mu$. 这样函数 $\lambda \mapsto F_\lambda$ 在 I_k 取常值. 若 $n > 0$, 则 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 必定有间断点.

我们将看到在无限维的时候情况会有所不同. 这将被用来解释无限维空间上的 Hermite 算子谱理论有时候是没用的.

3.5.10 例. 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\ell^2(I)$ 的典范标准正交基. 对于任意的 $i \in I$, 设 $\alpha_i \in \mathbb{R}$. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 设 F_λ 是由满足 $\alpha_i \leqslant \lambda$ 的 e_i 生成的闭线性子空间. 显然 $\lambda \leqslant \mu$ 推导出 $F_\lambda \subset F_\mu$, 且所有的 F_λ 的并集包含任意的 e_i, 因此在 $\ell^2(I)$ 中. 设 $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} F_\lambda$. 对于任意的 $i \in I$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $\lambda < \alpha_i$; 这样 e_i 和 F_λ 正交, 所以也和 x 正交; 因此 x 和任意的 e_i 正交, 即得 $x = 0$. 因此我们得到

$$F_{+\infty} = E, \quad F_{-\infty} = \{0\}.$$

我们有 $e_i \in F_{\alpha_i}$, 但 $e_i \notin F_{\alpha_i-}$, 因此, 若 $I \neq \varnothing$, 则族 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 不是左连续的. 我们将看到它是右连续的. 事实上, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 设 J (相应地, K) 是满足 $\alpha_i \leqslant \lambda$ (相应地, $\alpha_i > \lambda$) 的 $i \in I$ 构成的集合. 记 $P_{F_\lambda} = p_\lambda$. 对于 $i \in J$, 我们有 $p_\lambda e_i = e_i$, 且对于 $\lambda' > \lambda$ 也有 $p_{\lambda'} e_i = e_i$, 因此 $p_{\lambda+} e_i = e_i$. 对于 $i \in K$, 我们有 $p_\lambda e_i = 0$; 存在 $\lambda' > \lambda$ 使得 $\lambda' < \alpha_i$, 因此 $p_{\lambda'} e_i = 0$; 所以

$$p_{\lambda+} e_i = 0.$$

这样对于任意的 $i \in I$ 有 $p_\lambda e_i = p_{\lambda+} e_i$, 最后就得到 $p_\lambda = p_{\lambda+}$.

现在假设 α_i 的集合在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 这样对于任意满足 $\mu < \mu'$ 的 μ, μ', 存在 $i \in I$ 使得 $\mu < \alpha_i < \mu'$, 由此得到 $e_i \in F_{\mu'}$, $e_i \notin F_\mu$. 这样, $F_\mu \neq F_{\mu'}$: 分解 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 在任意长度 > 0 的区间上都不取常值.

3.5.11 例. 设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中线段. 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 设 F_λ 是对于任意满足 $t \geqslant \lambda$ 的 $t \in \Delta$ 都有 $f(t) = 0$ 的 $f \in L^2(\Delta)$ 构成的集合. 那么 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 $L^2(\Delta)$ 的一个左连续分解 (这一事实容易证明, 留作习题). 若 Δ 具有有限上确界 l, 则对于 $\lambda \geqslant l$ 我们有 $F_\lambda = L^2(\Delta)$. 若 Δ 具有有限下确界 l', 则对于 $\lambda \leqslant l'$ 我们有 $F_\lambda = \{0\}$.

设 $\mu, \mu' \in \Delta$ 而 $\mu < \mu'$, Δ 中 $[\mu, \mu']$ 的特征函数是 $F_{\mu'}$ 中与 F_μ 正交的非零元素. 这样, $F_{\mu'} \neq F_\mu$: 分解 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 在 Δ 中任何长度 > 0 的区间上都不是常值的.

3.5.12 定理. 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一族 Hilbert 空间, $E = \bigoplus\limits_{i\in I} E_i$. 在 E_i 中, 设 $(p^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是一族投影. 设 p_λ 是投影 $\bigoplus\limits_{i\in I} p^i_\lambda$.

(i) 为使 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是一个递增投影族, 必须且只需对于任意的 $i\in I$, $(p^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是一个递增投影族;

(ii) 假设条件 (i) 满足, 我们有

$$p_{\lambda+}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{\lambda+},\quad p_{\lambda-}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{\lambda-},$$
$$p_{+\infty}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{+\infty},\quad p_{-\infty}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{-\infty};$$

(iii) 为使 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是单位映射的一个分解, 必须且只需对于 $i\in I$, $(p^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是单位映射的分解.

设 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 对于任意的 $i\in I$, 我们有

$$p_\lambda p_\mu=p_\lambda\Leftrightarrow p^i_\lambda p^i_\mu=p^i_\lambda.$$

考虑到 3.4.5, 结论 (i) 得证. 下面假设 (i) 中条件成立. 那么 $p_{\lambda-}(E)$ 是由满足 $\lambda'<\lambda$ 的 $p_{\lambda'}(E)$ 生成的闭线性子空间, 因此 (根据 3.4.8) 对于满足 $i\in I$ 和 $\lambda'<\lambda$ 的 $p^i_{\lambda'}(E_i)$ 生成的闭线性子空间也是它, 同样对于全体满足 $i\in I$ 的 $p^i_{\lambda-}(E_i)$ 生成的闭线性子空间还是它. 根据 3.4.8, 我们得到

$$p_{\lambda-}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{\lambda-}.$$

要是我们改为考虑这些空间的正交补, 我们有

$$p_{\lambda+}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{\lambda+}.$$

而

$$p_{+\infty}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{+\infty},\quad p_{-\infty}=\bigoplus_{i\in I}p^i_{-\infty}$$

的证明是类似的. 最后, 结论 (iii) 是 (i) 和 (ii) 的推论.

3.5.13　定义. 如果 3.5.12(iii) 中的条件满足, 那么我们称单位映射的分解 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是**单位映射的分解 $(p^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的 Hilbert 和.**

对于 E 和 E_i 的分解我们也有类似的概念.

3.6　等距算子

3.6.1　定理. 设 E,F 是 Hilbert 空间, 且 $u\in\mathcal{L}(E;F)$. 下述条件是等价的:

(i) 对于任意的 $x\in E$, $\|ux\|=\|x\|$;

(ii) 对于任意的 $x,y\in E$, $(ux|uy)=(x|y)$;

(iii) $u^*u = \mathrm{id}_E$.

条件 (i) (相应地, (iii)) 可以写作: 对于任意的 $x \in E$, $(u^*ux|x) = (x|x)$ (相应地, 对于任意的 $x, y \in E$, $(u^*ux|y) = (x|y)$), 于是根据 2.4.4 (相应地, 2.4.3), 它和 (iii) 等价.

3.6.2 定义. 满足 3.6.1 中条件的线性算子称作等距算子.

显然, 一个这样的算子保持距离. 这里所用的术语和度量空间理论中所用的是一致的.

3.6.3 设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$ 是等距, u 是从 Hilbert 空间 E 到准 Hilbert 空间 $\mathrm{Im}\, u$ 的同构. 因此 $\mathrm{Im}\, u$ 是完备的, 从而它在 F 中是闭的.

3.6.4 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 下述条件是等价的:

(i) u 是从 Hilbert 空间 E 到 Hilbert 空间 F 的同构;

(ii) u 是等距且是满射;

(iii) $u^*u = \mathrm{id}_E$ 且 $uu^* = \mathrm{id}_F$;

(iv) u 是双射且 $u^{-1} = u^*$.

(i)⇒(iv): 若 u 是从 E 到 F 的同构, u 是双射且是等距映射, 因此 (根据 3.6.1) $u^*u = \mathrm{id}_E$, 即得 $u^* = u^{-1}$.

(iv)⇒(iii): 这是显然的.

(iii)⇒(ii): 若 $u^*u = \mathrm{id}_E$, (根据 3.6.1) u 是等距; 若我们还有 $uu^* = \mathrm{id}_F$, u 是双射.

(ii)⇒(i): 根据 3.6.3, 这是显然的.

3.6.5 定义. 满足 3.6.4 中条件的算子称为酉算子.

(根据 3.6.4(iii)) 一个酉算子显然是正常的.

3.6.6 设 E 是一个有限维 Hilbert 空间. 若 $u \in \mathcal{L}(E)$ 是等距映射, 则 u 是单射, 因此是满射, 这样 u 就是一个酉算子.

在无限维情况就有所不同了. 例如, 设 u 是从 ℓ^2 到 ℓ^2 的下述映射: 它把 ℓ^2 的元素 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 映到 $(0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots)$. 立即得到 u 是 ℓ^2 上的等距映射; 但 u 不是满射, 所以不是酉算子.

3.6.7 例. 利用例 2.1.11 中的记号. 我们有

$$u \text{ 是酉算子} \Leftrightarrow u \text{ 是等距算子} \Leftrightarrow \text{对于任意的 } i \in I,\ |\alpha_i| = 1.$$

事实上, 若 u 是酉算子, 则 u 是等距算子. 若 u 是等距算子, 则对于任意的 $i \in I$, 有

$$|\alpha_i| = \|\alpha_i e_i\| = \|ue_i\| = \|e_i\| = 1.$$

最后, 假设对于任意的 $i \in I$, 有 $|\alpha_i| = 1$. 根据 2.5.3, 我们知道任意的 $i \in I$, 有 $u^*e_i = \overline{\alpha_i}e_i$, 因此

$$uu^*(e_i) = \alpha_i\overline{\alpha_i}e_i = e_i, \quad u^*u(e_i) = \overline{\alpha_i}\alpha_i e_i = e_i,$$

即得 $uu^* = u^*u = 1$.

3.6.8　设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 根据 3.6.4 中的条件 (iii), u^* 也是酉算子.

3.6.9　设 E 是 Hilbert 空间. E 的酉算子构成一个乘法群, 称为 E 的**酉群**, 或 Hilbert 空间 E 的**自同构群**.

3.6.10　**定理.**　设 E 是不为 $\{0\}$ 的 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的酉元. 那么 $\operatorname{Sp} u$ 是单位圆 (即满足 $|\lambda| = 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 构成的集合) 的非空子集.

(根据 2.8.9) 我们知道 $\operatorname{Sp} u$ 是一个非空紧集. 若 $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, (根据 2.8.2(ii)) 我们有 $|\lambda| \leqslant \|u\| = 1$, 且 (根据 2.8.12) $\lambda^{-1} \in \operatorname{Sp}(u^{-1})$, 因此 $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$, 这样最后就得到 $|\lambda| = 1$.

3.6.11　根据 3.6.7 和 2.8.4, 一个酉算子的谱可以是单位圆的任意紧子集.

3.7　部分等距算子

3.7.1　**定义.**　设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 设 u 是 E_1 的支撑子空间. 若 $u|_{E_1}$ 是等距算子, 则我们称 u 是一个部分等距算子.

3.7.2　保留 3.7.1 中记号. 若 F_1 是 u^* 的支撑子空间, 而 $u_1 = u|_{E_1}$. 根据 2.5.18, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u_1$, 且在 F_1 中稠密, 且根据 3.6.3, $\operatorname{Im} u_1$ 是闭的. 因此 $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u_1 = F_1$. 这样, u_1 就是 E_1 到 F_1 的一个酉算子.

3.7.3　**定理.**　保持上述记号.

(i) $u^*u = P_{E_1}$;

(ii) 从 E_1 到 F_1 的酉算子 $u|_{E_1}$ 具有逆映射 $u^*|_{F_1}$;

(iii) u^* 是部分等距.

(i) 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$\begin{aligned}(u^*ux|x) = \|ux\|^2 &= \|uP_{E_1}x\|^2 \quad (\text{根据 } 3.4.10(\text{i})) \\ &= \|P_{E_1}x\|^2 \quad (\text{因为 } u|_{E_1} \text{ 是等距}) \\ &= (P_{E_1}x|x) \quad (\text{根据 } 3.4.3),\end{aligned}$$

因此根据 2.4.4, $u^*u = P_{E_1}$.

(ii) 由上述关系和 3.7.2 推出

$$(u^*|_{F_1})(u|_{E_1}) = \mathrm{id}_{E_1},$$

即 $u|_{E_1}$ 和 $u^*|_{F_1}$ 分别是从 E_1 到 F_1 和从 F_1 到 E_1 的互逆同构映射.

(iii) 我们刚刚看到 $u^*|_{F_1}$ 是等距映射. 由 F_1 的定义,

$$u^*|_{F_1^\perp} = 0,$$

所以 u^* 是部分等距.

3.7.4 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 下述条件是等价的:

(i) u 是部分等距;

(ii) u^* 是部分等距;

(iii) u^*u 是投影;

(iv) uu^* 是投影.

(i)⇔(ii): 这是 3.7.3 的推论.

(i)⇔(iii): 由 3.7.3 可以得到 (i)⇒(iii). 反之, 设 u^*u 是一个投影 p. 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$\|ux\|^2 = (u^*ux|x) = (px|x) = \|px\|^2.$$

因此:

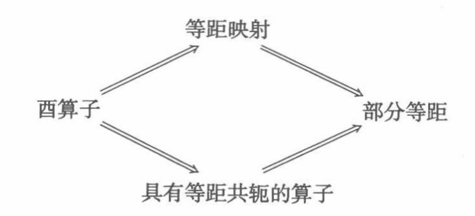
1) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} p$, 这样 u 的支撑子空间 E_1 等于 $p(E)$;

2) 若 $x \in E_1$, 我们有 $\|ux\| = \|px\| = \|x\|$.

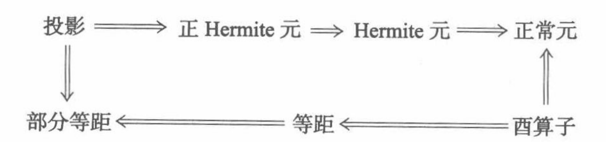
因此 u 是一个部分等距.

(ii)⇔(iv): 在等价关系 (i)⇔(iii) 中交换 u 和 u^* 即可得到.

3.7.5 根据 3.7.1, 一个等距映射自然是部分等距. 根据 3.7.4, 等距映射的共轭是部分等距. 因此我们有下述图表:



一个 Hilbert 空间上的连续线性算子之间的一般关系如下:



IV 紧算子

4.1 紧算子

4.1.1 设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 设 B 是 E 中的闭单位球. 那么 (根据 2.3.15) $u(B)$ **在 F 中是闭的**.

4.1.2 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, B 是 E 中闭单位球, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 下述条件是等价的:

(i) $u(B)$ 是 (对于范数拓扑) 紧的;

(ii) 对于 E 中任意序列 $(x_1, x_2, \cdots)$, 我们可以从序列 $(ux_1, ux_2, \cdots)$ 中找到一个收敛子列;

(iii) 存在 $\mathcal{L}(E;F)$ 的一列有限秩元素 $(u_1, u_2, \cdots)$, 使得当 $n \to +\infty$ 时 $\|u_n - u\| \to 0$.

(i)⇒ (ii): 假设 $u(B)$ 依范数拓扑是紧的. 设 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是 E 中有界序列. 存在 $\lambda > 0$ 使得对于任意的 n, $\lambda x_n \in B$. 这样对于任意的 n, $\lambda u x_n \in u(B)$, 于是我们可以从序列 $(\lambda u x_1, \lambda u x_2, \cdots)$ 中取出一个收敛子列.

(ii)⇒ (i): 设条件 (ii) 成立. $u(B)$ 的任意一列元素都可以写作 $(ux_1, ux_2, \cdots)$, 其中对于任意的 n, $x \in B$; 由假设, 我们可以取出一个收敛子列. 因此 $u(B)$ 在 F 中是相对紧的. 但 (根据 4.1.1) $u(B)$ 在 F 中是闭的.

(i)⇒ (iii): 假设 $u(B)$ 是紧的. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 $y_1, \cdots, y_n \in u(B)$ 使得 $u(B)$ 中任意元素都和某个 y_i 的距离 $\leqslant \varepsilon$. 设 $F' = \mathbb{C}y_1 + \cdots + \mathbb{C}y_n$, 它是 F 的一个有限维线性子空间, 从而 (根据 1.5.10) 是闭的. 对于任意的 $z \in u(B)$, 我们有

$$\|z - P_{F'}z\| \leqslant \varepsilon.$$

因此, 对于任意的 $x \in B$, 都有 $\|ux - P_{F'}ux\| \leqslant \varepsilon$. 换句话说, $\|u - P_{F'}u\| \leqslant \varepsilon$. 但由于 $P_{F'}u(E) \subset F'$, 从而算子 $P_{F'}u$ 是有限秩的. 这就证明了 (iii).

(iii)⇒ (i): 设条件 (iii) 满足. 设 $\varepsilon > 0$. 存在整数 n 使得 $\|u_n - u\| \leqslant \varepsilon$. 集合 $u_n(B)$ 是有界的, 且包含在 F 的一个有限维线性子空间内. 因此存在 $z_1, \cdots, z_p \in B$ 使得 $u_n(B)$ 的任意一个元素都和某个 uz_i 的距离 $\leqslant \varepsilon$. 设 $x \in B$. 存在 i 使得

$$\|u_n(x) - uz_i\| \leqslant \varepsilon,$$

即得

$$\|ux - uz_i\| \leqslant 2\varepsilon.$$

这样 $u(B)$ 的闭包 (这是 F 的一个完备子集) 是紧的; 但另一方面 (根据 4.1.1) 这个闭包就是 $u(B)$.

4.1.3 定义. 设 E, F 是 Hilbert 空间. $\mathcal{L}(E;F)$ 的元素称作是紧的, 若它满足 4.1.2 中条件.

4.1.4 定理. 设 E, F, G 是 Hilbert 空间.

(i) 若 $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$ 而 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 $u+v$ 和 λu 是紧的;

(ii) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$ 和 $w \in \mathcal{L}(F;G)$ 是紧的, 则 wu 是紧的;

(iii) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$ 和 $w \in \mathcal{L}(G;E)$ 是紧的, 则 uw 是紧的;

(iv) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$ 是紧的, 则 u^* 是紧的.

当我们把 "紧" 替换成 "有限秩" 时, 这些结论都是显然的. 下面只要利用 4.1.2 中的条件 (iii) 即可.

4.1.5 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间. 那么由 E 到 F 的全体紧算子构成的集合是依范数拓扑闭的.

设 $u, u_1, u_2, \cdots \in \mathcal{L}(E;F)$. 假设 $u_1, u_2, \cdots$ 是紧的, 且 $\|u_n - u\| \to 0$. 我们要证明 u 是紧的. 我们知道存在 $\mathcal{L}(E;F)$ 的有限秩元素 v_n 使得

$$\|v_n - u_n\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

这样

$$\|v_n - u\| = \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\| \to 0,$$

因此 u 是紧的.

4.1.6 例. 设 E, F 是 Hilbert 空间. 若 E 和 F 是有限维的, 从 E 到 F 的连续线性算子都是有限秩的, 因此是紧的. 我们将看到一般情况下这一点并不成立.

4.1.7 例. 取 2.1.11 中记号. 我们将证明下述条件是等价的:

(i) u 是紧的;

(ii) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 除了有限个以外所有的 $|\alpha_i| \leqslant \varepsilon$. (若 $I = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 此即: 当 $n \to +\infty$ 时 $\alpha_n \to 0$).

假设 u 是紧的. 用反证法, 假设存在 $\varepsilon > 0$ 和无穷多个指标 $i_1, i_2, \cdots \in I$ 使得

$$|\alpha_{i_1}| > \varepsilon, |\alpha_{i_2}| > \varepsilon, \cdots.$$

我们可以从序列 $(ue_{i_1}, ue_{i_2}, \cdots)$ 中取出一个依范数收敛子列. 但是 $ue_{i_k} = \alpha_{i_k} e_{i_k}$, 且 (如同 2.3.10 可知) 序列 $(\alpha_{i_k} e_{i_k})$ 弱收敛于 0. 因此从 $(\alpha_{i_k} e_{i_k})$ 中可以取出一个子列依范数收敛到 0. 而这是不可能的, 因为 $\|\alpha_{i_k} e_{i_k}\| = |\alpha_{i_k}| > \varepsilon$.

假设条件 (ii) 满足. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 I 的有限子集 J 使得对于任意的 $i \in I \setminus J$ 有 $|\alpha_i| \leqslant \varepsilon$. 对 $i \in J$ 定义 $\alpha'_i = \alpha_i$, 对 $i \in I \setminus J$ 定义 $\alpha'_i = 0$. 与 2.1.11 一样, 族 $(\alpha'_i)_{i\in I}$ 定义了 $\mathcal{L}(\ell^2(I))$ 的一个元素 u'. 对于 $i \in I \setminus J$ 我们有 $u'e_i = 0$, 因此 u' 是有限秩的. 另一方面, $u - u'$ 是由族 $(\alpha_i - \alpha'_i)_{i\in I}$ 定义的 $\mathcal{L}(\ell^2(I))$ 的一个元素. 因为对于任意的 $i \in I$ 都有 $|\alpha_i - \alpha'_i| \leqslant \varepsilon$, 根据 2.1.11 我们知道 $\|u - u'\| \leqslant \varepsilon$. 这就证明了 u 是紧的.

4.1.8 例如, 当 I 无限时, $\ell^2(I)$ 上的恒等映射不是紧的. 更一般地, 设 E 是无限维的, 并设 $u \in \mathcal{L}(E)$ 是可逆的, 那么 u 不是紧的. 这是因为, 利用 4.1.2 中的记号, 若 $u(B)$ 是依范数紧的, 则 $B = u^{-1}(u(B))$ 也是依范数紧的.

4.2 Hilbert-Schmidt 算子

4.2.1 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E; F)$. 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基, $(f_j)_{j\in J}$ 是 F 的一个标准正交基.

(i) 我们有

$$\sum_{i\in I} \|ue_i\|^2 = \sum_{j\in J} \|u^* f_j\|^2 = \sum_{i\in I,\ j\in J} |(ue_i|f_j)|^2;$$

(ii) 数 $\sum_{i\in I} \|ue_i\|^2$ 只依赖于 u, 而与 $(e_i)_{i\in I}$ 的选择无关.

我们有

$$\|ue_i\|^2 = \sum_{j\in J} |(ue_i|f_j)|^2,$$

$$\|u^* f_j\|^2 = \sum_{i\in I} |(u^* f_j|e_i)|^2 = \sum_{i\in I} |(ue_i|f_j)|^2,$$

即得 (i), 而结论 (ii) 是 (i) 的直接推论.

4.2.2 利用上述记号, 在本章中我们规定:

$$N(u) = \left(\sum_{i\in I} \|ue_i\|^2\right)^{1/2} \in [0, +\infty].$$

若 $(\beta_{ji})_{j\in J, i\in I}$ 是 u 关于基 (e_i) 和 (f_j) 的矩阵, 我们有

$$\beta_{ji} = (ue_i|f_j),$$

因此

$$N(u)^2 = \sum_{i\in I,\ j\in J} |\beta_{ji}|^2.$$

4.2.3 定理. 设 E, F, G 是 Hilbert 空间.

(i) 若 $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$, 我们有 $N(u+v) \leqslant N(u) + N(v)$;

(ii) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$ 而 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$;

(iii) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 则 $N(u^*) = N(u)$;

(iv) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $w \in \mathcal{L}(F;G)$, 我们有 $N(wu) \leqslant \|w\| N(u)$;

(v) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $w \in \mathcal{L}(G;E)$, 我们有 $N(uw) \leqslant \|w\| N(u)$;

(vi) 若 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 则 $\|u\| \leqslant N(u)$.

(在 (ii), (iv), (v) 中我们约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$.)

(i) 当 $N(u) = +\infty$ 或 $N(v) = +\infty$ 时这是显然的. 当 $N(u) < +\infty$ 且 $N(v) < +\infty$ 时, 根据 4.2.2, 只需对 $\ell^2(I \times J)$ 应用 1.5.1(iii) 即可.

(ii) 这是显然的.

(iii) 这一结论可以由 4.2.2 和 2.5.3 得到.

(iv) 设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $w \in \mathcal{L}(F;G)$, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基. 对于任意的 $i \in I$, 我们有

$$\|wue_i\|^2 \leqslant \|w\|^2 \|ue_i\|^2,$$

因此

$$N(wu)^2 \leqslant \|w\|^2 N(u)^2.$$

(v) 设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $w \in \mathcal{L}(G;E)$. 根据 (iii) 和 (iv),

$$N(uw) = N(w^*u^*) \leqslant \|w^*\| N(u^*) = \|w\| N(u).$$

(vi) 这一结论可以由 4.2.2 和 2.1.12 得到.

4.2.4 定义. 设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 若 $N(u) < +\infty$, 则我们称 u 是一个 Hilbert-Schmidt 算子.

4.2.5 定理. 设 E, F, G 是 Hilbert 空间, 以 $\mathscr{H}$ 记 E 到 F 的 Hilbert-Schmidt 算子全体.

(i) 若 $u, v \in \mathscr{H}$, 我们有 $u + v \in \mathscr{H}$;

(ii) 若 $u \in \mathscr{H}$ 而 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 $\lambda u \in \mathscr{H}$;

(iii) 若 $u \in \mathscr{H}$, 则 u^* 是一个 Hilbert-Schmidt 算子;

(iv) 若 $u \in \mathscr{H}$, $w \in \mathcal{L}(F;G)$, 则 wu 是一个 Hilbert-Schmidt 算子;

(v) 若 $u \in \mathscr{H}$, $w \in \mathcal{L}(G;E)$, 则 uw 是一个 Hilbert-Schmidt 算子.

应用 4.2.3 即得.

4.2.6 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E;F)$. 下述条件是等价的:

(i) u 是一个 Hilbert-Schmidt 算子;

(ii) 存在 $\mathcal{L}(E;F)$ 的一列有限秩元素 $(u_1, u_2, \cdots)$, 使得 $n \to +\infty$ 时 $N(u_n - u) \to 0$.

设 v 是 $\mathcal{L}(E;F)$ 中有限秩元素. 设 $E_1 = \operatorname{Ker} v$, $E_2 = E_1^{\perp}$. 这样 $v|_{E_2}$ 是单射, 而 $v(E_2) = v(E)$ 是有限维的 (参见 2.5.18), 因此 E_2 是有限维的. 存在 E 的一组标准正交基 $(e_i)_{i\in J\cup K}$, 使得 $(e_i)_{i\in J}$ 是 E_1 的标准正交基, 而 $(e_i)_{i\in K}$ 是 E_2 的标准正交基. 这样因为 K 是有限的, 所以

$$\sum_{i\in I} \|ve_i\|^2 = \sum_{i\in K} \|ve_i\|^2 < +\infty,$$

从而有 $N(v) < +\infty$.

然后假设条件 (ii) 成立. 存在整数 n 使得 $N(u-u_n) \leqslant 1$. 这样

$$N(u) \leqslant N(u-u_n) + N(u_n) < +\infty,$$

因此 u 是一个 Hilbert-Schmidt 算子.

反之, 设 u 是一个 Hilbert-Schmidt 算子. 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基, $(f_j)_{j\in J}$ 是 F 的一个标准正交基, $(\beta_{ji})_{j\in J, i\in I}$ 是 u 关于基 (e_i) 和 (f_j) 的矩阵. 我们有

$$\sum_{i\in I,\, j\in J} |\beta_{ji}|^2 < +\infty.$$

设 $\varepsilon > 0$. 存在 I 的有限子集 I', 使得

$$\sum_{i\in I\setminus I',\, j\in J} |\beta_{ji}|^2 \leqslant \varepsilon.$$

设 E_1 是 E 的由满足 $i \in I'$ 的 e_i 生成的有限维线性子空间. 设 $v = uP_{E_1}$, 这是 $\mathcal{L}(E;F)$ 中一个有限秩算子. 对于任意的 $i \in I'$ 有 $ve_i = ue_i$, 对于任意的 $i \in I \setminus I'$ 有 $ve_i = 0$. 因此

$$(N(u-v))^2 = \sum_{i\in I} \|(u-v)e_i\|^2 = \sum_{i\in I\setminus I'} \|ue_i\|^2 = \sum_{i\in I\setminus I',\, j\in J} |\beta_{ji}|^2 \leqslant \varepsilon.$$

这样就证明了 (i)⇒(ii).

4.2.7 定理. 所有 Hilbert-Schmidt 算子都是紧的.

由 4.2.6 和 4.2.3(vi) 即可得证.

4.2.8 例. 根据 4.2.2, 例 2.1.12 给出了所有的 Hilbert-Schmidt 算子.

特别地, 在例 2.1.11 中, u 是一个 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i|^2 < +\infty.$$

4.2.9 例. 取例 2.1.14 及其中记号. 我们来证明 v_K 是一个 Hilbert-Schmidt 算子, 而且更精确地, 我们有

$$N(v_K)^2 = \int_\Delta \int_{\Delta'} |K(t,t')|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t'.$$

设 $(e_1, e_2, \cdots)$ 是 $L^2(\Delta)$ 的一个标准正交基, $(f_1, f_2, \cdots)$ 是 $L^2(\Delta')$ 的一个标准正交基. 对于 $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, 定义

$$g_{m,n}(t,t') = \overline{e_m(t)} f_n(t').$$

函数 $g_{m,n}$ 在 $\Delta \times \Delta'$ 上是可测的.

另一方面,

$$\int_\Delta \int_{\Delta'} |g_{m,n}(t,t')|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' = \int_\Delta |e_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t \int_{\Delta'} |f_n(t')|^2 \, \mathrm{d}t' = 1.$$

所以 $g_{m,n} \in L^2(\Delta \times \Delta')$ (对于 $\Delta \times \Delta'$ 上的 Lebesgue 测度). $(g_{m,n})_{m\geqslant 1, n\geqslant 1}$ 是标准正交的, 因为

$$\int_\Delta \int_{\Delta'} g_{m,n}(t,t') \, \overline{g_{p,q}(t,t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' = \int_\Delta \overline{e_m(t)} e_p(t) \, \mathrm{d}t \int_{\Delta'} f_n(t') \, \overline{f_q(t')} \, \mathrm{d}t' = \delta_{mp}\delta_{nq}.$$

最后, 这个族在 $L^2(\Delta \times \Delta')$ 上是完全的. 事实上, 设 $L^2(\Delta \times \Delta')$ 中的元素 g 和所有 $g_{m,n}$ 都正交, 我们来证明 $g = 0$. 对于固定的 n, 我们有, 对于任意的 m,

$$0 = \int_\Delta \int_{\Delta'} g(t,t') e_m(t) \, \overline{f_n(t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' = \int_\Delta \left(\int_{\Delta'} g(t,t') \, \overline{f_n(t')} \, \mathrm{d}t' \right) e_m(t) \, \mathrm{d}t.$$

因此, 存在一个零测度集 A_n 使得对于任意的 $t \notin A_n$,

$$\int_{\Delta'} g(t,t') \, \overline{f_n(t')} \, \mathrm{d}t' = 0.$$

考虑零测度集 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$. 对于 $t \notin A$ 和任意的 n, 我们都有

$$\int_{\Delta'} g(t,t') \, \overline{f_n(t')} \, \mathrm{d}t' = 0,$$

这样对于几乎所有的 t', $g(t,t') = 0$. 由此得到 g 在 $\Delta \times \Delta'$ 上几乎处处为零, 即得 $g = 0$.

于是我们就证明了 $(g_{m,n})$ 是 $L^2(\Delta \times \Delta')$ 上的一个标准正交基. 这样就得到

$$\begin{aligned}
N(v_K)^2 &= \sum_{m\geqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} |(v_K e_m | f_n)|^2 \\
&= \sum_{m\geqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} \left| \int_\Delta \int_{\Delta'} K(t,t') e_m(t) \, \overline{f_n(t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' \right|^2 \\
&= \sum_{m\geqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} \left| \int_\Delta \int_{\Delta'} K(t,t') \, \overline{g_{m,n}(t,t')} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' \right|^2 \\
&= \int_\Delta \int_{\Delta'} |K(t,t')|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

4.3 正常紧算子的谱分解

4.3.1 引理. 设 E 是 Hilbert 空间, B 是 E 中闭单位球, 且 $u \in \mathcal{L}(E)$ 是正常紧算子.

(i) $B \times B$ 上的函数 $(x, y) \mapsto (ux|y)$ 是弱连续的;

(ii) 若 $E \neq \{0\}$, 则 u 有一个模长为 $\|u\|$ 的特征值.

(i) 设 (u_n) 是 $\mathcal{L}(E)$ 中满足 $\|u - u_n\| \to 0$ 的一列有限秩算子. 这样 $B \times B$ 上的函数 $(x, y) \mapsto (ux|y)$ 是函数 $(x, y) \mapsto (u_n x|y)$ 的一致极限, 因此只需证明这些函数都是弱连续的. 这样我们就只需考虑 u 是有限维的情形了. 设 $E_1 = \operatorname{Ker} u$, $E_2 = E_1^\perp$; 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是有限维空间 E_2 的标准正交基. 对于 $x, y \in E$, 我们有

$$(ux|y) = (uP_{E_2}x|y) = \left(u\left(\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i \right) \middle| y \right) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(ue_i|y),$$

且函数 $x \mapsto (x|e_i)$, $y \mapsto (ue_i|y)$ 在 E 上都是弱连续的.

(ii) 当 $u = 0$ 时, 结论 (ii) 是显然的. 设 $u \neq 0$. 将 u 乘上一个数, 我们可以假设 $\|u\| = 1$. (根据 3.1.13) 我们有

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |(ux|x)| = 1.$$

根据 (i) 和 B 的弱紧性 (参见 2.3.8), 存在 $x \in B$ 使得 $|(ux|x)| = 1$. 因为

$$|(ux|x)| \leqslant \|u\| \|x\|^2 = \|x\|^2,$$

这就要求 $\|x\| = 1$. 我们做分解 $ux = \lambda x + y$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$, 而 y 和 x 正交. 这样 $|(ux|x)| = \lambda(x|x) = \lambda$, 因此 $|\lambda| = 1$. 所以

$$1 \geqslant \|ux\|^2 = |\lambda|^2 + \|y\|^2 = 1 + \|y\|^2,$$

即得 $y = 0$, $ux = \lambda x$.

4.3.2 定理. 设 E 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E)$ 是正常紧算子. 则存在 E 的一个标准正交基 $(e_i)_{i \in I}$ 和一族复数 $(\alpha_i)_{i \in I}$, 满足:

(i) 对于任意的 $i \in I$, $ue_i = \alpha_i e_i$;

(ii) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 只有有限个指标 i 使得 $|\alpha_i| > \varepsilon$.

利用 3.1.8 中的记号. 那么 $u|_{G^\perp}$ 是紧 (因为 4.1.2 中的条件 (ii) 满足) 且 (根据 2.5.16) 正常的. 若 $G^\perp \neq 0$, (根据 4.3.1) $u|_{G^\perp}$ 有一个特征值, 这就和 3.1.8(iii) 矛盾. 因此 $G^\perp = 0$, $G = E$. 取每个 E_λ 的一个标准正交基, 我们得到 (e_i) 的存在性. 这样在同构的意义下我们就回到了例 4.1.7 的情形, 这就证明了 (ii).

4.3.3 推论. 设 E 是 Hilbert 空间, 且 $u \in \mathcal{L}(E)$ 是正常紧算子. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 设 E_λ 是相应的特征子空间. 设 S 是 u 的点谱.

(i) 我们有 $E = \bigoplus_{\lambda \in S} E_\lambda$;

(ii) S 是可数的; 更确切地说, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, S 中只有有限个元素的模 $> \varepsilon$;

(iii) 每个非零特征值的重数都是有限的.

这是 3.1.8, 4.3.2 和 4.1.7 的另外一种表达方式.

4.3.4 直到本节的末尾我们都保持 4.3.2 和 4.3.3 中的记号. 因为 $\operatorname{Ker} u = E_0$, 所以 u 的支撑子空间是

$$\bigoplus_{\lambda \in S,\, \lambda \neq 0} E_\lambda;$$

从而这个子空间是可数型的.

若 E 不是可数型的, 那么我们知道 0 必定是一个重数无限的特征值.

反之, 若 E 是可数型的, 如我们在例 4.1.7 中看到的那样, 0 可能是一个特征值, 也可能不是.

4.3.5 根据 2.8.4, $\operatorname{Sp} u$ 是 S 的闭包.

若 E 是有限维的, 我们得到 $\operatorname{Sp} u = S$ (我们已经知道这一点了, 参见 2.8.3).

假设 E 是无限维的. 根据 4.3.2(ii), S 的闭包 $S \cup \{0\}$. 因此 $\operatorname{Sp} u = S \cup \{0\}$. 根据 $0 \in S$ 或 $0 \notin S$, 我们可以得到 $\operatorname{Sp} u = S$ 或 $\operatorname{Sp} u \neq S$.

4.3.6 为使 u 是一个 Hilbert-Schmidt 算子, 根据 4.2.8, 必须且只需

$$\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty.$$

4.3.7 为使 u 是 Hermite 算子, (根据 3.2.3) 必须且只需, 对于任意的 $i \in I$, 有 $\alpha_i \in \mathbb{R}$. 为使 u 是半正定 Hermite 元, (根据 3.3.7) 必须且只需, 对于任意的 $i \in I$, 有 $\alpha_i \geqslant 0$. 在后一情况下, 我们可以把非零特征值 α_i 递降排列; 若这个序列是无限的, 它收敛于 0.

4.4 对积分方程的应用

4.4.1 设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中线段. 设 K 是 $\Delta \times \Delta$ 上的一个平方可积复值函数, 满足: 对于 $t, t' \in \Delta$,

$$K(t,t') = \overline{K(t,t')}.$$

根据 2.1.14, 3.2.5 和 4.2.9, 我们对于任意的 $f \in L^2(\Delta)$ 和 $t' \in \Delta$, 用

$$(v_K f)(t') = \int_\Delta K(t,t') f(t)\ \mathrm{d}t \tag{1}$$

定义 $L^2(\Delta)$ 上的一个 Hilbert-Schmidt 的 Hermite 算子 v_K.

4.4.2 定理. (i) v_k 的谱由 0 和一列重数有限的实特征值构成;

(ii) 设 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 是非零特征值构成的序列, 每个特征值都只出现有限多次, 我们有

$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_\Delta \int_\Delta |K(t,t')|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' < +\infty;$$

(iii) $L^2(\Delta)$ 是对应于各个特征值的特征子空间的 Hilbert 和;

(iv) 选择 $L^2(\Delta)$ 中的正交系 (φ_n), 对于任意的 n 满足 $v_k\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ (根据 (iii), 这是可能的), 设 $f \in L^2(\Delta)$, 记

$$c_n = \int_\Delta f(t) \, \overline{\varphi_n(t)} \, \mathrm{d}t,$$

这样级数

$$v_k f = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n \tag{2}$$

在 $L^2(\Delta)$ 中依范数收敛;

(v) 设 λ 是和所有的 λ_n 都不同的一个复数, 设 $g \in L^2(\Delta)$, 记

$$d_n = \int_\Delta g(t) \, \overline{\varphi_n(t)} \, \mathrm{d}t,$$

存在唯一的 $h \in L^2(\Delta)$, 使得

$$\int_\Delta K(t,t')h(t) \, \mathrm{d}t - \lambda h(t') = g(t') \tag{3}$$

在 Δ 上几乎处处成立, 而 h 由 $L^2(\Delta)$ 中依范数收敛的级数

$$h = -\frac{1}{\lambda} g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n \tag{4}$$

给出.

(i) 由 4.3.3, 4.3.5 和 4.3.7 可得.

(ii) 由 4.2.2 和 4.2.9 可得.

(iii) 由 4.3.3 可得.

(iv) 设 $N = \operatorname{Ker} v_K$. 我们有

$$f = P_N f + \sum_n (f|\varphi_n)\varphi_n,$$

因此

$$v_K f = \sum_n (f|\varphi_n) v_K \varphi_n = \sum_n (f|\varphi_n)\lambda_n\varphi_n = \sum_n c_n \lambda_n \varphi_n.$$

所有这样的级数在 $L^2(\Delta)$ 中是依范数收敛的.

(v) 我们有 $\lambda \notin \mathrm{Sp}(v_K)$, 因此方程 (参见 (3))

$$(v_K - \lambda)h = g$$

有唯一解 $h \in L^2(\Delta)$, 具体地说

$$\begin{aligned} h = (v_K - \lambda)^{-1} g &= (v_K - \lambda)^{-1}\left(P_N g + \sum_n d_n \varphi_n\right) \\ &= -\frac{1}{\lambda} P_N g + \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} d_n \varphi_n \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left(g - \sum_n d_n \varphi_n\right) + \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} d_n \varphi_n; \end{aligned}$$

即得等式 (4), 所有这样的级数在 $L^2(\Delta)$ 中都是依范数收敛的.

4.4.3 定理. 利用 4.4.2 中记号. 设 φ_{mn} 是 $\Delta \times \Delta$ 上由

$$\varphi_{mn}(t, t') = \overline{\varphi_m(t)} \varphi_n(t')$$

定义的函数. 那么 $L^2(\Delta \times \Delta)$ 中的级数

$$K = \sum_n \lambda_n \varphi_{nn} \tag{5}$$

是依范数收敛的.

利用 $\mathrm{Ker}\, v_K$ 的一组标准正交基, 我们可以把标准正交系 (φ_n) 补全为 $L^2(\Delta)$ 的一组标准正交基. 为简单起见, 我们仍然用 (φ_n) 记这组标准正交基, 以 λ_n 记 φ_n 对应的特征向量; 而这不改变级数 (5), 因为我们只加上了对应于 $\lambda_n = 0$ 的项.

根据 4.2.9, 族 (φ_{mn}) 是 $L^2(\Delta \times \Delta)$ 的一组标准正交基. 因此, 如果我们定义 $\mu_{pq} = (K|\varphi_{pq})$, 我们有

$$\sum_{p,q} |\mu_{pq}|^2 < +\infty, \quad \text{且 } K = \sum_{p,q} \mu_{pq} \varphi_{pq},$$

这个双重级数在 $L^2(\Delta \times \Delta)$ 中依范数收敛, 而

$$\begin{aligned} \mu_{pq} &= \int_\Delta \int_\Delta K(t, t') \varphi_p(t)\, \overline{\varphi_q(t')}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}t' \\ &= \int_\Delta (v_K \varphi_p)(t')\, \overline{\varphi_q(t')}\, \mathrm{d}t' \\ &= (v_K \varphi_p | \varphi_q) = (\lambda_p \varphi_p | \varphi_q) = \lambda_p \delta_{pq}. \end{aligned}$$

4.4.4 用一种不太严格的说法, 我们称 $L^2(\Delta)$ 中的一个元素是连续的, 若它在 $\mathcal{L}^2(\Delta)$ 中有一个连续的代表元 (其他的代表元和这个函数几乎处处相等). 若 $L^2(\Delta)$ 的一个元素是连续的, 且若将其和一个函数等同起来, 我们约定取连续的代表元.

定理. 设 Δ 是紧的, 而 K 在 $\Delta\times\Delta$ 上连续 (这就说明了 K 是平方可积的).

(i) 对于任意的 $f\in L^2(\Delta)$, 由 (1) 给出的函数 $v_K f$ 是连续的;

(ii) v_K 对应于任意非零特征值的特征函数都是连续的;

(iii) 利用 4.4.2(iv) 中的记号, 级数 (2) 是一致且绝对收敛的;

(iv) 利用 4.4.2(v) 中的记号, 假设 g 连续, 那么 f 是连续的, 且级数 (4) 是一致且绝对收敛的.

(i) 对于 $u\in\Delta$, 以 K_u 记 Δ 上的函数 $t\mapsto K(t,u)$; 它是连续的, 因此可以视作 $L^2(\Delta)$ 的一个元素. 当 $u\to u_0\in\Delta$ 时, K_u 一致收敛于 K_{u_0} (因为函数 K 作为紧空间 $\Delta\times\Delta$ 上的连续函数, 是一致连续的), 因此在 $L^2(\Delta)$ 中 u 依范数收敛于 K_{u_0}. 然而若假设 $f\in L^2(\Delta)$, 我们有 $(v_K f)(u)=(K_u|\bar{f})$, 因此 $v_K f$ 是连续的. 由上文还可以知道, 存在一个有限常数 M, 使得对于任意的 $f\in L^2(\Delta)$:

$$\sup_{u\in\Delta}|(v_K f)(u)|\leqslant M\|f\|. \tag{6}$$

(ii) 设 $v_K f=\lambda f$, 其中 $\lambda\neq 0$, 根据 (i), λf 是连续的, 因此 f 连续.

(iii) 取 4.4.2(iv) 中的级数 (2). 根据 (6) 我们有

$$\sup_{u\in\Delta}\left|\sum_{n=p}^{q}\lambda_n c_n\varphi_n(t)\right|\leqslant M\left\|\sum_{n=p}^{q}c_n\varphi_n\right\|,$$

而当 $p,q\to+\infty$ 时 $\left\|\sum_{n=p}^{q}c_n\varphi_n\right\|$ 趋向于 0. 因此级数 (2) 在 Δ 上一致收敛. 特别地, 对于任意的 $t_0\in\Delta$, 级数 $\sum_n\lambda_n c_n\varphi_n(t_0)$ 收敛. 但是因为级数 (2) 在 $L^2(\Delta)$ 中收敛这一事实和各项的顺序无关, 对于级数

$$\sum_n\lambda_n c_n\varphi_n(t_0)$$

也有同样性质, 从而它是绝对收敛的.

(iv) 取 4.4.2(v) 中记号. 根据 (3) 我们有

$$\frac{1}{\lambda}g+h=\frac{1}{\lambda}v_K h,$$

因此, 由 (i) 可知 $\frac{1}{\lambda}g+h$ 连续, 从而 h 连续; 而对 $f=\frac{1}{\lambda}h$ 应用 (iii) 即得级数

$$\sum_n\frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}d_n\varphi_n=h+\frac{1}{\lambda}g=v_K\left(\frac{1}{\lambda}h\right)$$

一致且绝对收敛.

V 连续 Hermite 算子的谱分解

5.1 连续函数演算

5.1.1 引理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, p 是复系数多项式, a 是 $|p(t)|$ 在 $\operatorname{Sp} h$ 上的上确界. 那么 $\|p(h)\| = a$.

根据 2.8.13, 我们有 $\operatorname{Sp}(p(h)) = p(\operatorname{Sp} h)$. 另一方面, $p(h)$ 是正常元, 因此 (根据 3.1.13)

$$\|p(h)\| = \sup_{z \in \operatorname{Sp}(p(h))} |z|.$$

5.1.2 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元. 设 A 是 $\operatorname{Sp} h$ 上的复值连续函数代数, 具有一致收敛范数. 那么存在由 A 到 $\mathcal{L}(E)$ 的唯一一个映射 φ 满足下述性质:

(i) φ 是代数同态;

(ii) $\varphi(1) = 1$;

(iii) φ 把 $\operatorname{Sp} h$ 上的函数 $t \mapsto t$ 映到 h;

(iv) (对于 A 和 $\mathcal{L}(E)$ 上的范数) φ 是连续的.

设 P 是 $\mathbb{C}$ 上复系数多项式全体构成的代数. 设 $B = P|_{\operatorname{Sp} h}$. 设 φ, φ' 是从 A 到 $\mathcal{L}(E)$ 的满足条件 (i)—(iv) 的两个映射. 对 $p \in P$, 性质 (i)—(iii) 要求

$$\varphi(p|_{\operatorname{Sp} h}) = p(h), \quad \varphi'(p|_{\operatorname{Sp} h}) = p(h).$$

因此 $\varphi|_B = \varphi'|_B$. 另一方面, 根据 Stone-Weierstrass 定理, B 在 A 中稠密. 性质 (iv) 能够推出 $\varphi = \varphi'$, 即得定理中的唯一性结论.

现在来证明 φ 的存在性. 设 $g \in B$. 选取 g 在 P 中的延拓 p. $\mathcal{L}(E)$ 的元素 $p(h)$ 只依赖于 g, 而和 p 的具体选择无关; 因为若 $q \in P$ 是 g 的延拓, 那么对于任意的 $t \in \operatorname{Sp} h$, 我们有 $(p-q)(t) = 0$, 从而根据 5.1.1 知道 $(p-q)(h) = 0$, 即 $p(h) = q(h)$. 我们定义 $\psi(g) = p(h)$. 这样 ψ 是从 B 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射, 满足类似于 (i), (ii) 和 (iii) 的性质. 此外, 根据 5.1.1, 对于任意的 $g \in B$, $\|\psi(g)\| = \|g\|$. 因为 B 在 A 中稠密, 而 (根据 2.2.3) $\mathcal{L}(E)$ 是完备的, 我们可以应用 2.2.2 (的适当推广, 如前所述): ψ 可以扩张为一个从 A 到 $\mathcal{L}(E)$ 的连续映射 φ. 显然 φ 满足性质 (ii) 和 (iii). 因为 ψ 是代数的同态, 由连续性可知 φ 也是代数的同态.

5.1.3 5.1.2 中定义的映射 φ 称为**由 h 定义的从 A 到 $\mathcal{L}(E)$ 的典范同态**. 若 $f \in A$ 是某个多项式 p 在 $\operatorname{Sp} u$ 上的限制, 那么由 φ 的构造可知 $\varphi(f) = p(h)$. 因此很自然地, 对于任意 $f \in A$ 可以定义

$$f(h) = \varphi(f).$$

这样记号 $f(h)$ 就不仅仅在 f 是一个多项式的时候有意义, 而是更一般地当 f 仅仅是定义在 $\mathbb{R}$ (甚至仅仅定义在 $\operatorname{Sp} u$) 上的一个连续复值函数时都有意义. 5.1.2 中的性质 (i) 即为: 对于任意的 $f, g \in A$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(f+g)(h) &= f(h) + g(h),\\ (\lambda f)(h) &= \lambda f(h),\\ (fg)(h) &= f(h)g(h).\end{aligned}$$

以一种稍许有点模糊的方式, 我们称有一个 h 上的 "函数演算" (或者 "连续函数演算", 因为我们要求 f 是连续的).

5.1.4 例. 取例 2.1.11 中的记号, 并假设对于任意的 $i \in I$, 都有 $\alpha_i \in \mathbb{R}$, 这样, (根据 3.2.3) u 就是 Hermite 元. 若 $p \in \mathbb{C}[X]$, 则显然 $p(u)$ 是由对于任意的 $i \in I$, $p(u)e_i = p(\alpha_i)e_i$ 定义的 $\mathcal{L}(E)$ 的元素. (根据 2.8.4) 我们知道 $\operatorname{Sp} u$ 是全体 α_i 构成的集合的闭包. 设 f 是 $\operatorname{Sp} u$ 上的复值连续函数. 设 (p_n) 是 $\mathbb{C}[X]$ 中一列在 $\operatorname{Sp} u$ 上一致收敛于 f 的元素. 因此对于任意的 $i \in I$, 都有

$$f(u)e_i = f(\alpha_i)e_i.$$

特别地, 若 $I = \{1, 2, \cdots\}$, $\mathcal{L}(E)$ 的元素 $f(u)$ 对于基 (e_i) 的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f(\alpha_2) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & f(\alpha_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

这就给出了连续函数演算的一个非常直观的描述. 而且我们可以预料到函数演算可以推广到不连续的函数上去 (参见 5.3).

5.1.5 例. 取例 2.1.13 中的记号, 设 Δ 有界且并不退化成一个点, 对于任意的 $t \in \Delta$ 设有 $f(t) = t$. 为简单起见, 我们记 $u_f = u$. 那么 (根据 3.2.4) u 是 Hermite 元, 且 (根据 2.8.5) $\operatorname{Sp} u = \overline{\Delta}$. 显见对于整数 $n \geqslant 0$, u^n 是 $L^2(\Delta)$ 中由函数 t^n 定义的乘法算子. 因此, 对于任意 $p \in \mathbb{C}[X]$, (始终用 2.1.13 中的记号) 我们有 $p(u) = u_p$. 设 g 是 $\operatorname{Sp} u = \overline{\Delta}$ 上的复值连续函数. 这样 $p_n(u)$ 依范数收敛于 $g(u)$. 另一方面, 根据 2.1.13,

$$\|p_n(u) - u_g\| = \|u_{p_n} - u_g\| = \|u_{p_n - g}\| \to 0.$$

因此 $g(u) = ug$ 就是 $L^2(\Delta)$ 中由函数 g 定义的乘法算子. 这里同样给出了连续函数演算的一个非常直观的描述. 而且我们可以预料到函数演算可以推广到不连续的函数上去.

5.1.6 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, 而 f 是 $\operatorname{Sp} h$ 上的一个复值连续函数.*

(i) $f(h)$ 是正常的, 而且是 h 的多项式的范数极限;

(ii) $\bar{f}(h) = f(h)^*$;

(iii) 若 f 是实值的, 则 $f(h)$ 是 Hermite 的;

(iv) 若 $c, d \in \mathbb{R}$ 满足 $c \leqslant f \leqslant d$, 则 $c \leqslant f(h) \leqslant d$;

(v) $\|f(h)\| = \|f\|$.

(根据 5.1.1) 当 f 在 $\operatorname{Sp} h$ 上的限制是一个多项式时, 结论 (v) 成立, 因此考虑极限过程即知一般情况下也成立. 从连续函数演算的构造可知 $f(h)$ 是 h 的多项式的范数极限. 当 f 在 $\operatorname{Sp} h$ 上的限制是一个多项式时, $\bar{f}(h) = f(h)^*$, 因此考虑极限过程即知一般情况下也成立. 结论 (ii) 推出结论 (iii), 并推出 $f(h)$ 和 $f(h)^*$ 可交换, 因此 $f(h)$ 是正常元. 为证明 (iv), 只需在 $h \geqslant 0$ 的假设下证明 $f(h) \geqslant 0$. 我们取 $g = f^{1/2}$, 它是 $\operatorname{Sp} h$ 上的一个连续函数. 那么 $f = g\bar{g}$, 根据 3.3.4(iv) 即得

$$f(h) = g(h)g(h)^* \geqslant 0.$$

5.1.7 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, 而 f 是 $\operatorname{Sp} h$ 上的一个复值连续函数.*

(i) 我们有 $\operatorname{Sp}(f(h)) = f(\operatorname{Sp} h)$;

(ii) 设 f 是实的, 而 g 是 $\operatorname{Sp}(f(h))$ 上的一个复值连续函数, 那么 $g(f(h))$ 和 $(g \circ f)(h)$ 都有定义, 且相等.

(i) 设 $\lambda \in f(\operatorname{Sp} h)$. 存在 $\mu \in \operatorname{Sp} h$ 使得 $\lambda = f(\mu)$. 设 $(p_1, p_2, \cdots)$ 是 $\operatorname{Sp} h$ 上一致收敛于 f 的一列多项式. 这样 $p_n(h) - p_n(\mu)$ 依范数收敛于 $f(h) - f(\mu)$. 但 (根据 2.8.15) $p_n(h) - p_n(\mu)$ 是不可逆的, 因此 (根据 2.6.5(i)) $f(h) - f(\mu)$ 是不可逆的. 从而 $\lambda \in \operatorname{Sp}(f(h))$.

设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\operatorname{Sp} h)$. 那么 $f' = (f-\lambda)^{-1}$ 是定义在 $\operatorname{Sp} h$ 上的连续复值函数. 我们有

$$(f-\lambda)f' = f'(f-\lambda) = 1,$$

因此

$$(f(h)-\lambda)f'(h) = f'(h)(f(h)-\lambda) = 1.$$

这就证明了 $f(h)-\lambda$ 可逆, 即 $\lambda \notin \operatorname{Sp}(f(h))$.

(ii) 设 $g \circ f$ 是定义在 $\operatorname{Sp} h$ 上的连续复值函数, 这样 $(g \circ f)(h)$ 是有定义的. 因为 f 是实值函数, $f(h)$ 是 Hermite 算子, 又因为 g 是定义在 $f(\operatorname{Sp} h)$ 上的连续函数, 所以 $g(f(h))$ 是有定义的. 设 $(q_1, q_2, \cdots)$ 是 $\operatorname{Sp}(f(h))$ 上一致收敛于 g 的一列多项式. 根据 5.1.3, 我们有

$$(f(h))^2 = f^2(h), (f(h))^3 = f^3(h), \cdots,$$

因此

$$q_n(f(h)) = (q_n \circ f)(h).$$

当 $n \to +\infty$ 时, 应用 5.1.3 于 $f(h)$, 我们得到 $q_n(f(h))$ 依范数收敛于 $g(f(h))$. 另一方面, 在 $\operatorname{Sp} h$ 上 $q_n \circ f$ 一致收敛于 $g \circ f$, 因此 $(q_n \circ f)(h)$ 依范数收敛于 $(g \circ f)(h)$. 从而有

$$g(f(h)) = (g \circ f)(h).$$

5.1.8　设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元. 考虑由

$$f_1(t) = \sup(t, 0), \quad f_2(t) = -\inf(t, 0), \quad f_3(t) = |t|$$

定义的 $\mathbb{R}$ 上实值连续函数. 我们有

$$t = f_1(t) - f_2(t), f_1 \geqslant 0, f_2 \geqslant 0, f_1 f_2 = 0, f_1 + f_2 = f_3.$$

我们定义

$$f_1(h) = h^+, \quad f_2(h) = h^-, \quad f_3(h) = |h|.$$

根据 5.1.2 和 5.1.6, 我们有

$$h = h^+ - h^-, h^+ \geqslant 0, h^- \geqslant 0, h^+h^- = h^-h^+ = 0, h^+ + h^- = |h|.$$

我们称 h^+ (相应地, h^-) 是 h 的**正部** (相应地, **负部**), $|h|$ 称作 h 的**绝对值**, 也记作 $\operatorname{abs} h$.

若 $h \geqslant 0$, 对于任意的 $t \in \operatorname{Sp} h$ 有 $f_2(t) = 0$, 因此 $h^- = 0$, 因此 $h = h^+ = |h|$.

5.1.9 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, $\theta \in (0, +\infty)$. 函数 $t \mapsto t^\theta$ 在 $[0, +\infty)$ 上是连续的, 因此在 $\operatorname{Sp} h$ 上连续. 以 f 记这个函数, 我们令

$$f(h) = h^\theta.$$

因为 $t^\theta t^{\theta'} = t^{\theta+\theta'}$, 根据 5.1.2, 我们有, 对于任意的 $\theta > 0, \theta' > 0$,

$$h^\theta h^{\theta'} = h^{\theta+\theta'}.$$

因为 $(t^\theta)^{\theta'} = t^{\theta\theta'}$, 根据 5.1.7, 我们有, 对于任意的 $\theta > 0, \theta' > 0$,

$$(h^\theta)^{\theta'} = h^{\theta\theta'}.$$

5.1.10 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{L}(E)$ 中(半)正定元全体. 映射 $h \mapsto h^2$ $(h \in \mathcal{P})$ 和 $h \mapsto h^{1/2}$ $(h \in \mathcal{P})$ 是从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{P}$ 的双射.*

事实上, 对于 $h \in \mathcal{P}$, 根据 5.1.9, 我们有 $(h^{1/2})^2 = h$ 和 $(h^2)^{1/2} = h$.

5.1.11 例. 取 2.1.11 中记号. 应用 5.1.4, 我们得到

当 $\alpha_i \geqslant 0$ 时, $u^+ e_i = \alpha_i e_i$, 当 $\alpha_i < 0$ 时, $u^+ e_i = 0$;

当 $\alpha_i \leqslant 0$ 时, $u^- e_i = \alpha_i e_i$, 当 $\alpha_i > 0$ 时, $u^- e_i = 0$;

对任意的 $i \in I$, $|u| e_i = |\alpha_i| e_i$.

若对于任意的 $i \in I$ 还有 $\alpha_i \geqslant 0$, 我们得到 $u \geqslant 0$ 且对于任意的 $i \in I$ 和 $\theta > 0$, $u^\theta e_i = \alpha_i^\theta e_i$.

5.1.12 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元. 我们有 $M_h = \sup(\operatorname{Sp} h)$, $m_h = \inf(\operatorname{Sp} h)$.*

设 $c = \inf(\operatorname{Sp} h)$. 把 5.1.6(iv) 应用于 $\operatorname{Sp} h$ 上的函数 $t \mapsto t$, 我们得到 $c \leqslant h$. 因此 $c \leqslant m_h$. 另一方面, 根据 3.3.9(i), $c \geqslant m_h$. 因此 $c = m_h$. 把 h 换成 $-h$, 我们就得到 $M_h = \sup(\operatorname{Sp} h)$.

5.1.13 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E)$. 下述条件是等价的:*

(i) u 是正 Hermite 元;

(ii) u 是 Hermite 元, 且 $\operatorname{Sp} u \subset [0, +\infty)$;

(iii) 存在 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元 v 使得 $u = v^2$;

(iv) 存在 $w \in \mathcal{L}(E)$, 使得 $u = ww^*$.

(i)⇔(ii) : 这由 3.3.9 和 5.1.12 可得.

(i)⇒(iii) : 若 u 是正 Hermite 元, 则我们有 $u = (u^{1/2})^2$.

(iii)⇒(iv) : 这是显然的.

(iv)⇒(i) : 这由 3.3.4(iv) 可得.

5.2　应用: 连续线性算子的极分解

5.2.1　定义. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$. $\mathcal{L}(E)$ 的元素 $(u^*u)^{1/2}$ 称作 u 的绝对值, 记作 $|u|$ 或 $\operatorname{abs} u$.

对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 我们有 $(t^2)^{1/2} = |t|$; 因此, 考虑到 5.1.7, 这一定义推广了我们在 5.1.8 中当 u 是 Hermite 元时所用的定义.

5.2.2　定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$, 而 $h = \operatorname{abs} u$.

(i) 对于任意的 $x \in E$, 我们有 $\|ux\| = \|hx\|$;

(ii) h 和 u 具有相同的核和支撑.

对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$\|ux\|^2 = (u^*ux|x) = (h^2x|x) = \|hx\|^2,$$

即得 (i). 结论 (i) 推导出 h 和 u 具有相同的核, 因此有相同的支撑.

5.2.3　定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{L}(E;F)$, E_1 是 u 的支撑子空间, F_1 是 u^* 的支撑子空间, 而 $h = \operatorname{abs} u$. 存在 $\mathcal{L}(E;F)$ 中唯一的部分等距 v 满足下述条件:

(i) $u = vh$;

(ii) v 和 u 具有相同的核.

此外, $v|_{E_1}$ 是 E_1 到 F_1 的酉同态.

定义 $G = \operatorname{Im} h$. 它的闭包 $\overline{G}$ 是 $h^* = h$ 的支撑, 因此 (根据 5.2.2) $\overline{G} = E_1$.

我们来定义一个从 G 到 $\operatorname{Im} u$ 的映射 u. 设 $y \in G$. 存在 $x \in E$ 使得 $y = hx$. 算子 ux 只依赖于 y 而不依赖于 x 的选取. 因为若 $y = hx'$, 我们有 $h(x - x') = 0$, 所以 (根据 5.2.2) $u(x - x') = 0$, 即 $ux = ux'$. 我们记 $ux = wy$. 显然 w 是从 G 到 $\operatorname{Im} u$ 的同态; 此外, 利用前述记号, 我们有

$$\begin{aligned} \|wy\| = \|ux\| &= \|hx\| \quad (\text{根据 } 5.2.2) \\ &= \|y\|, \end{aligned}$$

因此 w 是等距. 根据 2.2.2, w 可以扩张成 $\overline{G} = E_1$ 到 $\overline{\operatorname{Im} u} = F_1$ 的一个连续线性算子 w'; 由连续性, 这个线性算子是等距, 因此它的像是闭的, 等于 F_1.

设 v 是满足 $v|_{E_1} = w'$, $v|_{\operatorname{Ker} u} = 0$ 的从 E 到 F 的同态. 那么 v 是局部等距, v 和 u 具有相同的核, 且 $v|_{E_1}$ 是 E_1 到 F_1 的酉算子. 设 $x \in E$. 我们有 $hx \in G$, 且根据 w 的定义, $ux = w(hx)$. 注意到 w 和 w' 在 G 上等同, 因此 $ux = v(hx)$, 这样就证明了 $u = vh$.

设 v_1 是满足 $u = v_1h$ 和 $\operatorname{Ker} v_1 = \operatorname{Ker} u$ 的 $\mathcal{L}(E;F)$ 中部分等距. 我们来证明 $v_1 = v$. 显然, 我们有

$$v|_{\operatorname{Ker} u} = 0 = v_1|_{\operatorname{Ker} u}.$$

另一方面, 对于任意的 $x \in E$, 我们有 $v_1(hx) = ux = v(hx)$; 因此

$$v_1|_G = v|_G;$$

由连续性, 我们得到

$$v_1|_{E_1} = v|_{E_1}.$$

因此 $v_1 = v$.

5.2.4 5.2.3 中定义的分解 $u = vh$ 称为 v 的**极分解**. 这个分解就把 $\mathcal{L}(E;F)$ 中任意一个元素的研究分解成了对于一个正 Hermite 元 (它的绝对值) 和一个部分等距算子的研究. 这是把复数分解成 z_1z_2 (其中 $|z_1| = 1$, $z_2 \geqslant 0$) 的推广.

5.2.5 推论. *设 E, F 是 Hilbert 空间. 如果存在 E 到 F 的双射且双连续算子 u, 那么 E 和 F 具有相同的 Hilbert 维数.*

应用 5.2.3 中记号, 我们有 $E_1 = E$, $F_1 = F$, 因此 v 是从 E 到 F 的酉算子.

5.3 函数演算的推广

5.3.1 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, $x \in E$. 设 A 是 $\operatorname{Sp} h$ 上连续复值函数全体. 根据 5.1.2 和 5.1.6(iv), 从 A 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $g \mapsto (g(h)x|x)$ 是 A 上的正线性泛函, 即对应于 $\operatorname{Sp} h$ 上的一个正测度 μ. 我们称 μ 是**由 x (和 h) 定义的谱测度**. 对于任意的 $g \in A$, 我们有

$$(g(h)x|x) = \int_{\operatorname{Sp} h} g(t) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

特别地, 取 $\operatorname{Sp} h$ 上的函数 $g = 1$, 我们得到 $(x|x)$ 是 μ 的**总质量**.

我们知道, $\operatorname{Sp} h$ 上的正测度 μ 等同于 $\mathbb{R}$ 上的一个支撑在 $\operatorname{Sp} h$ 中的正测度.

5.3.2 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, $(f_1, f_2, \cdots)$ 是 $\operatorname{Sp} h$ 上一列有界连续复值函数, 点点收敛于函数 f. 那么序列 $(f_1(h), f_2(h), \cdots)$ 强收敛于 $\mathcal{L}(E)$ 中的一个元素, 且这个极限只依赖于 f 和 h, 而和序列 (f_n) 无关.*

设 $x \in E$, μ_x 是由 x 和 h 定义的谱测度. 我们有

$$\|f_n(h)x - f_m(h)x\| = ((f_n - f_m)\overline{(f_n - f_m)}(h)x|x) = \int_{\operatorname{Sp} h} |(f_n - f_m)(t)|^2 \, \mathrm{d}\mu_x(t),$$

而根据 Lebesgue 定理这个积分是趋向于 0 的. 因此 $f_n(x)$ 依范数收敛于一个极限, 记之为 vx. 易知 v 是 E 上线性算子. 另一方面, 根据 5.1.6(v), 我们有

$$\|f_n(h)x\| \leqslant \|f_n\|\|x\|,$$

因此

$$\|vx\| \leqslant (\sup_n \|f_n\|)\|x\|,$$

即得 $v \in \mathcal{L}(E)$, 更确切地说,

$$\|v\| \leqslant \sup_n \|f_n\|. \tag{1}$$

设 $(f_1', f_2', \cdots)$ 是 $\operatorname{Sp} h$ 上一列有界连续复值函数, 简单收敛于函数 f. 因此序列 $(f_1, f_1', f_2, f_2', \cdots)$ 简单收敛于函数 f. 这样序列 $(f_1(h), f_1'(h), f_2(h), f_2'(h), \cdots)$ 在 $\mathcal{L}(E)$ 中有强极限. 因此子序列 $(f_1(h), f_2(h), \cdots)$ 和 $(f_1'(h), f_2'(h), \cdots)$ 具有相同的强极限.

5.3.3　保留上述证明中的记号. 我们有

$$(vx|x) = \lim_{n\to+\infty}(f_n(h)x|x) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\operatorname{Sp} h} f_n(t)\ \mathrm{d}\mu_x(t),$$

因此根据 Lebesgue 定理, 有

$$(vx|x) = \int_{\operatorname{Sp} h} f(t)\ \mathrm{d}\mu_x(t).$$

5.3.4　在下述命题中, 我们保持 5.3.1 中的记号 A, 并以 $\widehat{A}$ 记 $\operatorname{Sp} h$ 上可以作为一列有界连续复值函数的简单极限的函数全体. 显然 $\widehat{A}$ 在通常的运算下成为一个代数. 若 $f \in \widehat{A}$, 我们仍然记

$$\|f\| = \sup_{t\in\operatorname{Sp} h} |f(t)|.$$

对于 $f \in \widehat{A}$, **由 5.3.2 定义的 $\mathcal{L}(E)$ 的元素记作** $f(h)$. 这是 5.1.3 中的相应定义的推广. 更一般地, 对于一个定义域包含 $\operatorname{Sp} h$ 的函数 f 都可以应用记号 $f(h)$, 当然在此意义下 $f(h)$ 即指 $(f|_{\operatorname{Sp} h})(h)$.

5.3.5　**定理.**　*设 $E, h, \widehat{A}$ 如上所述.*

(i) 由 $\widehat{A}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射 $f \mapsto f(h)$ 是从 $\widehat{A}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的一个交换子代数的同态;

(ii) 对 $f \in \widehat{A}$, 我们有 $\bar{f}(h) = f(h)^*$;

(iii) 若 $f \in \widehat{A}$ 是实的, 则 $f(h)$ 是 Hermite 元;

(iv) 若 $f \in \widehat{A}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ 满足 $c \leqslant f \leqslant d$, 则 $c \leqslant f(h) \leqslant d$;

(v) 若 $f \in \widehat{A}$, 则 $f(h)$ 是正常元, 且是 h 的一列多项式的强极限;

(vi) 对 $f \in \widehat{A}$, 我们有 $\|f(h)\| \leqslant \|f\|$;

(vii) 设 $(f_1, f_2, \cdots)$ 是简单收敛于 $\widehat{A}$ 中元素 f 的一个有界序列, 那么 $(f_n(h))$ 强收敛于 $f(h)$;

(viii) 设 $x \in E$, μ_x 是 x 和 h 定义的谱测度, 我们有, 对于 $f \in \widehat{A}$,

$$(f(h)x|x) = \int_{\operatorname{Sp} h} f(t)\ \mathrm{d}\mu_x(t);$$

(ix) 利用同样的记号,

$$\|f(h)x\|^2 = \int_{\mathrm{Sp}\, h} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}\mu_x(t).$$

(i) 设 $f, g \in \widehat{A}$. 存在 A 中的一个有界序列 (f_n) (相应地, (g_n)) 简单收敛于 f (相应地, g). A 中序列 $(f_n g_n)$ 仍然是有界的, 并简单收敛于 fg. 这样 $(f_n(h))$ 强收敛于 $f(h)$, $(g_n(h))$ 强收敛于 $g(h)$, $((f_n g_n)(h))$ 强收敛于 $(fg)(h)$. 但根据 5.1.3, $(f_n g_n)(h) = f_n(h) g_n(h)$. 因此根据 2.9.9(iii),

$$(fg)(h) = f(h)g(h).$$

同理可知

$$(f+g)(h) = f(h) + g(h);$$

而对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda f)(h) = \lambda f(h).$$

这样, $f \mapsto f(h)$ 是从 $\widehat{A}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的同态. 因为 $\widehat{A}$ 是交换代数, 它的同态像是一个交换代数.

(viii) 这是 5.3.3 的另外一种表述方式.

(ii) 设 $f \in \widehat{A}$. 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$\begin{aligned}(f(h)^* x|x) = (x|f(h)x) &= \overline{\int_{\mathrm{Sp}\, h} f(t) \, \mathrm{d}\mu_x(t)} \quad (\text{根据 (viii)}) \\ &= \int_{\mathrm{Sp}\, h} \bar{f}(t) \, \mathrm{d}\mu_x(t) = (\bar{f}(h)x|x) \quad (\text{根据 (viii)}),\end{aligned}$$

因此根据 2.4.4, $f(h)^* = \bar{f}(h)$.

(iii) 这是 (ii) 的推论.

(iv) 设 $f \in \widehat{A}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ 满足 $c \leqslant f \leqslant d$. 设 $x \in E$ 满足 $\|x\| = 1$. 根据 (viii), 我们有

$$(f(h)x|x) \leqslant \int_{\mathrm{Sp}\, h} d \, \mathrm{d}\mu_x(t) = d(x|x) = d,$$

因此 $f(h) \leqslant d$. 同理可得 $f(h) \geqslant c$.

(v) 设 $f \in \widehat{A}$. 根据 (i) 和 (ii), $f(h)$ 和 $\bar{f}(h) = f(h)^*$ 可交换, 因此 $f(h)$ 是正常元. 存在 A 中一个简单收敛于 f 的有界序列 (f_n). 设 $p_n \in \mathbb{C}[X]$ 满足

$$\|p_n|_{\mathrm{Sp}\, h} - f_n\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

这样序列 $(p_n|_{\mathrm{Sp}\, h})$ 简单收敛于 f, 因此由 $f(h)$ 的构造知序列 $(p_n(h))$ 强收敛于 $f(h)$.

(ix) 我们有

$$\|f(h)x\|^2 = (f(h)^*f(h)x|x) = ((\bar{f}f)(h)x|x) \quad (\text{根据 (i) 和 (ii)})$$
$$= \int_{\mathrm{Sp}\,h} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\mu_x(t) \quad (\text{根据 (viii)}).$$

(vi) 若 $f \in \widehat{A}$, $x \in E$ 而 $\|x\| \leqslant 1$, 根据 (ix) 我们有

$$\|f(h)x\|^2 \leqslant \int_{\mathrm{Sp}\,h} \|f\|^2 \,\mathrm{d}\mu_x(t) = \|f\|^2\|x\|^2,$$

因此 $\|f(h)\| \leqslant \|f\|$.

(vii) 利用 (vii) 中记号, 对于任意的 $x \in E$ 我们有 (根据 (ix))

$$\|f_n(h)x - f(h)x\|^2 = \int_{\mathrm{Sp}\,h} |(f_n - f)(t)|^2 \,\mathrm{d}\mu_x(t),$$

根据 Lebesgue 定理, 这个积分趋向于 0.

5.3.6 例. 取例 2.1.11 中的记号, 并假设对于任意的 $i \in I$, 都有 $\alpha_i \in \mathbb{R}$. (根据 2.8.4) 我们知道 $\mathrm{Sp}\,u$ 是全体 α_i 构成的集合的闭包. 设 $f \in \widehat{A}$. 设 (f_n) 是 A 中简单收敛于 f 的一个有界序列. 根据 5.1.4, 对于任意的 $i \in I$, $f_n(u)e_i = \alpha_i e_i$. 当 $n \to +\infty$ 时, 根据 $f(u)$ 的构造知 $f_n(\alpha_i) \to f(\alpha_i)$, $f_n(u)e_i \to f(u)e_i$. 因此对于任意的 $i \in I$, 都有

$$f(u)e_i = f(\alpha_i)e_i.$$

5.3.7 例. 取例 2.1.13 中的记号, 设 Δ 有界且并不退化成一个点, 对于任意的 $t \in \Delta$, 设 $f(t) = t$. 为简单起见, 我们记 $u_f = u$. 设 g 是 $\widehat{A}$ 中元素, 即一个可以作为 $\overline{\Delta}$ 上的一列复值连续函数 (g_n) 的简单极限的 $\overline{\Delta}$ 上复值函数. 对于任意的 $l \in L^2(\Delta)$, 我们 (根据 Lebesgue 定理) 有

$$\|g_n l - gl\|^2 = \int_{\Delta} |g_n(t) - g(t)|^2 |l(t)|^2 \,\mathrm{d}t \to 0,$$

因此 u_{g_n} 强收敛于 u_g. 然而根据 5.1.5, $u_{g_n} = g_n(u)$, 且根据 $g(u)$ 的构造可知, $g_n(u)$ 强收敛于 $g(u)$. 因此

$$g(u) = u_g.$$

5.4 Hermite 算子的谱分解

5.4.1 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 设 e_λ 是在 $(-\infty, \lambda]$ 上取值为 1, 而在 $(\lambda, +\infty)$ 上取值为 0 的 $\mathbb{R}$ 上函数.

(i) 每个 e_λ 是一列有界连续函数的简单极限, 这样 $p_\lambda = e_\lambda(h)$ 是可以定义的;

(ii) 每个 p_λ 都是一个投影, 且是 h 的多项式的强极限;

(iii) $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是恒等映射的一个分解, 这样对 $\lambda \leqslant m_h$, $p_\lambda = 0$; $\lambda \geqslant M_h$, $p_\lambda = 1$.

(i) 这是显然的.

(ii) 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有 $e_\lambda = \overline{e_\lambda} = e_\lambda^2$, 因此 (根据 5.3.5(i) 和 (ii)) $p_\lambda = p_\lambda{}^* = p_\lambda^2$, 从而 p_λ 是投影. 因此 (根据 5.3.5(v)) 它是 h 的一列多项式的强极限.

(iii) 设 $\lambda \geqslant \mu$, 我们有 $e_\mu - e_\lambda \geqslant 0$, 因此 (根据 5.3.5(iv)) $p_\mu - p_\lambda \geqslant 0$. 若 $\lambda < m_h$, 我们有 $e_\lambda|_{\mathrm{Sp}\,h} = 0$, 因此 $p_\lambda = 0$. 若 $\lambda \geqslant M_h$, 我们有 $e_\lambda|_{\mathrm{Sp}\,h} = 1$, 因此 $p_\lambda = 1$. 当 $n \to +\infty$ 时, 序列 $(e_{\lambda+1/n})$ 简单收敛于 e_λ, 因此 (根据 5.3.5(vii)) $(p_{\lambda+1/n})$ 强收敛于 p_λ, 从而 $p_{\lambda+} = p_\lambda$.

5.4.2 定义. 5.4.1 中的恒等映射的分解 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (或者相应的 E 的分解) 称作和 h 关联的恒等映射的分解 (或者 E 的分解).

5.4.3 例. 取例 2.1.11 中的记号, 并假设对于任意的 $i \in I$, 都有 $\alpha_i \in \mathbb{R}$. 设 (p_λ) 是 u 对应的恒等映射的分解. 根据 5.3.6, 当 $\alpha_i \leqslant \lambda$ 时 $p_\lambda e_i = e_i$, 当 $\alpha_i > \lambda$ 时 $p_\lambda e_i = 0$. 因此分解 (p_λ) 就是我们在 3.5.10 中所讨论过的.

5.4.4 例. 设 E 是有限维 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元. 在相差一个同构的意义下, 我们也处在例 2.1.11 所考虑的情形中. 设 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 是 h 的特征值的递降序列. 设 E_λ 是 λ 对应的特征子空间. 根据 5.4.3, h 所对应的 E 的分解 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 如下: 对于 $\lambda < \lambda_n$, $F_\lambda = 0$, 在 $[\lambda_i, \lambda_{i-1})$ 中 $F_\lambda = E_{\lambda_n} \oplus E_{\lambda_{n-1}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_i}$, 对于 $\lambda \geqslant \lambda_1$, $F_\lambda = E$.

5.4.5 例. 取例 2.1.13 中的记号, 设 Δ 有界且并不退化成一个点, 对于任意的 $t \in \Delta$ 设有 $f(t) = t$. 设 $\Delta = [l', l]$. 定义 $u_f = u$. 设 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 u 对应的恒等映射的分解. 根据 5.3.7, 我们知道当 $\lambda \leqslant l'$ 时, $p_\lambda = 0$; 当 $\lambda \geqslant l$ 时, $p_\lambda = 1$; 当 $l' < \lambda < l$ 时, p_λ 是 $L^2(\Delta)$ 中 $\Delta \cap (-\infty, \lambda]$ 的特征函数所对应的乘法算子. 因此我们又得到了 3.5.11 所讨论的情形.

5.4.6 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是和 h 关联的恒等映射的分解, x 是 E 中的元素, μ_x 是由 x 和 h 定义的谱测度. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\mu_x((-\infty, \lambda]) = (p_\lambda x|x) = \|p_\lambda x\|^2.$$

利用 5.4.1 引进的记号 e_λ. 根据 5.3.5(viii), 我们有

$$(p_\lambda x|x) = (e_\lambda(h)x|x) = \int_{\mathbb{R}} e_\lambda(t)\, \mathrm{d}\mu_x(t)$$

(注意到 μ_x 可以作为 $\mathbb{R}$ 上支撑在 $\mathrm{Sp}\,h$ 上的测度). 最后一个积分是 μ_x 下 $(-\infty, \lambda]$ 的测度.

5.4.7　这样, μ_x 是 $\mathbb{R}$ 上由递增函数 $\lambda \mapsto (p_\lambda x|x)$ 所定义的测度; 换句话说, 用积分论的经典记号, 有

$$\mathrm{d}\mu_x(\lambda) = \mathrm{d}(p_\lambda x|x).$$

公式 5.3.5(viii) 可以重写为

$$(f(h)x|x) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|x).$$

特别地,

$$(hx|x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\ \mathrm{d}(p_\lambda x|x).$$

基于上述原因, 我们记

$$f(h) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda;$$

特别地, 有

$$\boxed{h = \int_{\mathbb{R}} \lambda\ \mathrm{d}p_\lambda.}$$

我们称这个等式为 h 的**谱分解**. 在下文 (6.1.7) 中我们将把这些记号更加系统化.

我们也记

$$f(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda;$$

或

$$f(h) = \int_{\mathrm{Sp}\, h} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda;$$

或

$$f(h) = \int_{m_h}^{M_h} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda.$$

5.4.8　我们可以写 $h = \displaystyle\int_{m_h}^{M_h} \lambda\ \mathrm{d}p_\lambda$ 的另一个理由是下述定理中的结论 (iii).

定理.　设 E 是 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元, (F_λ) 是 h 对应的 E 的分解, $p_\lambda = P_{F_\lambda}$.

(i) 每个 F_λ 都化简 h;

(ii) 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 满足 $\lambda \leqslant \mu$, 那么

$$\lambda \leqslant h|_{F_\mu \ominus F_\lambda} \leqslant \mu;$$

(iii) 对于 $[m_h, M_h]$ 的任意分割 $\sigma = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 定义

$$h_\sigma = \lambda_0(p_{\lambda_1} - p_{\lambda_0}) + \lambda_1(p_{\lambda_2} - p_{\lambda_1}) + \cdots + \lambda_{n-1}(p_{\lambda_n} - p_{\lambda_{n-1}}),$$

这样当 $\sup\limits_i |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \to 0$ 时, h_σ 依范数收敛于 h;

(iv) h^+ 在 $F_0^\perp$ 上和 h 重合, 在 F_0 上和 0 重合; h^- 在 F_0 上和 $-h$ 重合, 在 $F_0^\perp$ 上和 0 重合;

(v) 设 $w \in \mathcal{L}(E)$, 为使 w 和 h 可交换, 必须且只需, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, w 和 p_λ 可交换.

(i) 根据 5.3.5(i), 我们有 $p_\lambda h = hp_\lambda$, 因此 (根据 3.4.9(ii)) F_λ 化简 h.

(ii) 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 满足 $\lambda \leqslant \mu$. 利用 5.4.1 中的记号 e_λ. 我们有

$$t(e_\mu - e_\lambda)(t) = \begin{cases} 0, & \text{对于 } t \leqslant \lambda, \\ t, & \text{对于 } \lambda < t \leqslant \mu, \\ 0, & \text{对于 } t > \mu, \end{cases}$$

因此对于任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(e_\mu - e_\lambda)(t) \leqslant t(e_\mu - e_\lambda)(t) \leqslant \mu(e_\mu - e_\lambda)(t).$$

根据 5.3.5(iv), 我们得到

$$\lambda(p_\mu - p_\lambda) \leqslant f(p_\mu - p_\lambda) \leqslant \mu(p_\mu - p_\lambda).$$

若 $x \in F_\mu \ominus F_\lambda$, 我们有 $(p_\mu - p_\lambda)x = p_\mu x - p_\lambda x = x - 0 = x$, 因此

$$\lambda(x|x) \leqslant (hx|x) \leqslant \mu(x|x),$$

这就证明了 (ii).

(iii) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上满足下述条件的函数: 当 $t \leqslant \lambda_1$ 时, 有 $f(t) = \lambda_0$, 当 $\lambda_1 < t \leqslant \lambda_2$ 时, 有 $f(t) = \lambda_1, \cdots$, 当 $\lambda_{n-2} < t \leqslant \lambda_{n-1}$ 时, 有 $f(t) = \lambda_{n-2}$, 当 $t > \lambda_{n-1}$ 时, 有 $f(t) = \lambda_{n-1}$. 我们有

$$f = \lambda_0 e_{\lambda_1} + \lambda_1(e_{\lambda_2} - e_{\lambda_1}) + \cdots + \lambda_{n-2}(e_{\lambda_{n-1}} - e_{\lambda_{n-2}}) + \lambda_{n-1}(1 - e_{\lambda_{n-1}}),$$

且对于任意的 $t \in [m_h, M_h]$ 有

$$|f(t) - t| \leqslant \sup_i |\lambda_i - \lambda_{i-1}|.$$

因此 $f(h) = h_\sigma$, 且根据 5.3.5(vi) 可知

$$\|f(h) - h\| \leqslant \sup_i |\lambda_i - \lambda_{i-1}|.$$

(iv) 我们有 $h(1 - p_0) = g(h)$, 其中

$$g(t) = t(1 - e_0(t)) = \begin{cases} t, & \text{对于 } t > 0, \\ 0, & \text{对于 } t \leqslant 0, \end{cases}$$

这就得到了

$$h(1-p_0)=h^+. \tag{2}$$

同理可知

$$-hp_0=h^-. \tag{3}$$

由上述 (2) 和 (3) 即可推出 (iv).

(v) 设 $w\in\mathcal{L}(E)$. 若 $wh=hw$, 根据 5.4.1(ii), 我们有 $wP-\lambda=p_\lambda w$. 设对于任意的 λ 都有 $wP-\lambda=p_\lambda w$, 根据 5.4.8(iii), 我们有 $wh=hw$.

5.4.9　5.4.8(iii) 的直观解释如下: 我们可以把 E 视为无穷多个空间 $F_{\mu+\mathrm{d}\mu}\ominus F_\mu$ 的 Hilbert 和. 在 $F_{\mu+\mathrm{d}\mu}\ominus F_\mu$ 中, h 作用是以 μ 为系数的乘积算子. 若 μ 不是 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的间断点, $F_{\mu+\mathrm{d}\mu}\ominus F_\mu$ 是 "无穷小" 的. 若 μ 是 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的间断点, $F_{\mu+\mathrm{d}\mu}\ominus F_\mu=F_{\mu+}\ominus F_\mu$ 是 μ 对应的特征子空间 (我们现在就来证明最后这一点).

5.4.10　定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, (F_λ) (相应地, (p_λ)) 是和 h 关联的 E (相应地, 恒等映射) 的分解. 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 设 E_λ 是相应的特征子空间, f_λ 是在 λ 取 1, 而在 $\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}$ 上取 0 的函数.

(i) 对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 我们有 $E_\lambda=F_\lambda\ominus F_{\lambda-}$, $P_{E_\lambda}=p_\lambda-p_{\lambda-}=f_\lambda(h)$;

(ii) 为使某个实数是 (F_λ) 的间断点, 必须且只需它是 h 的特征值;

(iii) 设 $x\in E$, 而 μ_x 是由 x 和 h 定义的谱测度, 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\mu_x(\{\lambda\})=\|P_{E_\lambda}x\|^2=(P_{E_\lambda}x|x).$$

设 $\lambda\in\mathbb{R}$. 记 $f_\lambda(h)=q$. 利用 5.4.1 中定义的 e_λ. 这样 (根据 5.3.5(vii)) f_λ 是 $e_\lambda-e_{\lambda-1/n}$ 在 $n\to+\infty$ 时的简单极限. 于是 $q=p_\lambda-p_{\lambda-}$.

设 $x\in E_\lambda$. 对于任意整数 $n\geqslant 0$ 我们有 $h^nx=\lambda^nx$. 首先, 对于 $f\in\mathbb{C}[X]$, 我们有 $f(h)x=f(\lambda)x$, 然后两边取极限, 即可得此关系对于任意的 $f\in\widehat{A}$ (利用 5.3.4 中的记号) 也成立. 特别地, $qx=f_\lambda(\lambda)x=x$. 反之, 设 $qx=x$. 因为对于任意的 $t\in\mathbb{R}$ 都有 $tf_\lambda(t)=\lambda f_\lambda(t)$, 我们有

$$hx=hf_\lambda(h)x=\lambda f_\lambda(h)x=\lambda x.$$

这样,

$$E_\lambda=q(E)=(p_\lambda-p_{\lambda-})(E)=F_\lambda\ominus F_{\lambda-}.$$

这样我们就证明了 (i), 而 (ii) 是 (i) 的直接推论. 最后, 利用 (iii) 中记号, 我们有

$$\begin{aligned}(P_{E_\lambda}x|x)&=(f_\lambda(h)x|x) &&\text{(根据 (i))}\\ &=\int_{\mathbb{R}}f_\lambda(t)\,\mathrm{d}\mu_x(t) &&\text{(根据 5.3.5(viii))}\\ &=\mu_x(\{\lambda\}).\end{aligned}$$

5.4.11 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个 Hermite 元, (F_λ) 是和 h 关联的 E 的分解, $\mu \in \mathbb{R}$. 下述条件是等价的:*

(i) $\mu \notin \operatorname{Sp} h$;

(ii) 存在包含 μ 的开区间使得 F_λ 在其上是常值.

设 $\mu \notin \operatorname{Sp} h$, 则存在和 $\operatorname{Sp} h$ 不交的区间 $[\alpha, \beta]$ 使 μ 为其内点. 利用 5.4.1 中记号, $e_\beta - e_\alpha$ 在 $\operatorname{Sp} h$ 上为 0, 因此

$$p_\beta - p_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)(h) = 0.$$

这样, $F_\alpha = F_\beta$, 于是对于 $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, $F_\alpha = F_\lambda = F_\beta$.

假设 F_λ 在某个以 μ 为内点的区间 $[\alpha, \beta]$ 上取常值. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上函数, 满足: 当 $t \notin (\alpha, \beta]$ 时 $f(t) = (t-\mu)^{-1}$, 当 $t \in (\alpha, \beta]$ 时 $f(t) = 0$. 这样 $f \in \widehat{A}$, 且对于任意的 $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t)(t-\mu) = e_\alpha(t) - e_\beta(t) + 1$$

(事实上, 当 $t \notin (\alpha, \beta]$ 时两边都等于 1, 当 $t \in (\alpha, \beta]$ 时两边都等于 0). 这样

$$f(h)(h-\mu) = (h-\mu)f(h) = p_\alpha - p_\beta + 1 = 1,$$

且 $\mu \notin \operatorname{Sp} h$.

5.4.12 基于定理 5.4.10 和 5.4.11, 我们称 h 的点谱在 $\operatorname{Sp} h$ 中的补集为 h 的**连续谱**.

5.5 正常算子的谱分解

5.5.1 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元. (根据 3.2.10) 记 $u = v + \mathrm{i}w$, 其中 v 和 w 是两个可交换的 Hermite 元.

我们把 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{C}$ 等同起来. 我们把 $\mathbb{C}$ 上的函数 $z \mapsto z$ 简记为 z. 这样我们可以考虑函数 $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$ 和 $\operatorname{Im} z$. 我们将要考虑形如 $g(z, \bar{z})$ 的函数, 其中 $g \in \mathbb{C}[X, Y]$. 这也就是形如 $h(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ 的函数, 其中 $h \in \mathbb{C}[X, Y]$.

设 g, $h \in \mathbb{C}[X, Y]$ 满足 $g(z, \bar{z}) = h(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. 这样 $g(u, u^*) = h(v, w)$. 事实上, 只需对 $g(X, Y)$ 是一个单项式 $X^m Y^n$ 的情形验证就可以了. 这时

$$g(z, \bar{z}) = z^m \bar{z}^n = (\operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z)^m (\operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z)^n,$$

因此

$$h(X, Y) = (X + \mathrm{i}Y)^m (X - \mathrm{i}Y)^n,$$

这样我们就有

$$g(u, u^*) = u^m u^{*n} = (v + \mathrm{i}w)^m (v - \mathrm{i}w)^n = h(v, w).$$

5.5.2 引理. 设 (p_λ), (q_μ) 分别是 v 和 w 对应的恒等映射的分解.

(i) 对于任意的 λ 和 μ, p_λ 和 q_μ 是可交换的;

(ii) 对于 $[m_v-1, M_v]$ 和 $[m_w-1, M_w]$ 的任意一对分割 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 和 $(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_t)$, 记 $r_{jk} = (p_{\lambda_j} - p_{\lambda_{j-1}})(q_{\mu_k} - q_{\mu_{k-1}})$, $G_{jk} = r_{jk}(E)$, 那么 r_{jk} 是和为 1 的投影, 且两两垂直, 空间 E 是 G_{jk} 的 Hilbert 和;

(iii) 设 $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ 对于 $z \in \operatorname{Sp} u$ 满足 $|g(z,\bar{z})| \leqslant a$, 于是 $\|g(u,u^*)\| \leqslant a$.

(i) 由 5.4.8(v) 可得.

(ii) 根据 (i), $p_{\lambda_j} - p_{\lambda_{j-1}}$ 是 $q_{\mu_k} - q_{\mu_{k-1}}$ 相互交换的投影, 因此根据 3.4.7, r_{jk} 是一个投影. 我们知道 $p_{\lambda_j} - p_{\lambda_{j-1}}$ (相应地, $q_{\mu_k} - q_{\mu_{k-1}}$) 是和为 1 且两两正交的投影. 因此 E 是 G_{jk} 的 Hilbert 和.

(iii) 设 $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ 对于 $z \in \operatorname{Sp} u$ 满足 $|g(z,\bar{z})| \leqslant a$. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 $\eta > 0$, 使得条件

$$|z - z'| \leqslant \eta, \quad z, z' \in [m_v - 1, M_v] \times [m_w - 1, M_w]$$

蕴涵了

$$|g(z,\bar{z}) - g(z', \bar{z}')| \leqslant \varepsilon.$$

选取 (ii) 中的 λ_j 和 μ_k, 使得对于任意的 j 和 k,

$$|\lambda_j - \lambda_{j-1}| \leqslant \frac{1}{2}\eta, \quad |\mu_k - \mu_{k-1}| \leqslant \frac{1}{2}\eta.$$

我们定义

$$v' = \sum_j \lambda_{j-1}(p_{\lambda_j} - p_{\lambda_{j-1}}), \quad w' = \sum_k \mu_{k-1}(q_{\mu_k} - q_{\mu_{k-1}}).$$

设 $h \in \mathbb{C}[X,Y]$ 满足

$$h(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = g(z, \bar{z}).$$

我们有

$$v'|_{G_{jk}} = \lambda_{j-1}, \quad w'|_{G_{jk}} = \mu_{k-1},$$

因此

$$h(v', w')|_{G_{jk}} = h(\lambda_{j-1}, \mu_{k-1}) = g(\lambda_{j-1} + \mathrm{i}\mu_{k-1}, \lambda_{j-1} - \mathrm{i}\mu_{k-1}).$$

下面我们区分两种情况:

a) $[\lambda_{j-1}, \lambda_j] \times [\mu_{k-1}, \mu_k]$ 在某一点 z_{jk} 和 $\operatorname{Sp} u$ 相交. 我们有 $|\lambda_{j-1} + \mathrm{i}\mu_{k-1} - z_{jk}| \leqslant \eta$, 从而有

$$|g(\lambda_{j-1} + \mathrm{i}\mu_{k-1}, \lambda_{j-1} - \mathrm{i}\mu_{k-1})| \leqslant |g(z_{jk}, \overline{z_{jk}})| + \varepsilon \leqslant a + \varepsilon.$$

由此即得 $\|h(v', w')|_{G_{jk}}\| \leqslant a + \varepsilon$.

b) $[\lambda_{j-1},\lambda_j]\times[\mu_{k-1},\mu_k]$ 和 $\mathrm{Sp}\,u$ 不交. 根据 3.3.9(iii), $\mathrm{Sp}(u|_{G_{jk}})\subset[\lambda_{j-1},\lambda_j]\times[\mu_{k-1},\mu_k]$. 另一方面, 显然有 $\mathrm{Sp}(u|_{G_{jk}})\subset\mathrm{Sp}\,u$. 这样 $\mathrm{Sp}(u|_{G_{jk}})=\varnothing$, 从而 (根据 2.8.9) $G_{jk}=\{0\}$. 于是显然有 $\|h(v',w')|_{G_{jk}}\|\leqslant a+\varepsilon$.

综合上述两点, 我们就得到 $\|h(v',w')\|\leqslant a+\varepsilon$.

当 $\sup\limits_j|\lambda_{j-1}-\lambda_j|$ 和 $\sup\limits_k|\mu_{k-1}-\mu_k|$ 趋向于 0 时, (根据 5.4.8) v' 和 w' 依范数趋向于 v 和 w, 因此 $h(v',w')$ 依范数趋向于 $h(v,w)$. 所以 $\|h(v,w)\|\leqslant a+\varepsilon$, 即 $\|g(u,u^*)\|\leqslant a+\varepsilon$.

这对于任意的 $\varepsilon>0$ 都成立, 这样我们就证明了 (iii).

5.5.3 对正常算子 u 的谱理论的讨论现在就可以基本上和 Hermite 算子的谱理论完全一样地展开: 引理 5.5.2(iii) 起到了引理 5.1.1 的作用, 而另一方面, 根据 Stone-Weierstrass 定理, 形如 $g(z,\bar{z})|_{\mathrm{Sp}\,u}$ 的函数 (其中 $g\in\mathbb{C}[X,Y]$) 在 $\mathrm{Sp}\,u$ 上复值连续函数集合 A 中是稠密的.

5.5.4 定理. *存在由 A 到 $\mathcal{L}(E)$ 的唯一一个映射 φ 满足下述条件:*

(i) *φ 是代数同态;*

(ii) $\varphi(1)=1$;

(iii) $\varphi(z)=u$ *且* $\varphi(\bar{z})=u^*$;

(iv) *(对于 A 和 $\mathcal{L}(E)$ 的范数) φ 是连续的.*

这个定理的证明和定理 5.1.2 的证明是完全类似的.

5.5.5 利用 5.5.4 中记号, 对于 $f\in A$ 我们定义 $\varphi(f)=f(u)$. 特别地, 我们有

$$\mathrm{Re}\,u=v,\quad \mathrm{Im}\,u=w,$$

因为

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad \mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}).$$

5.5.6 定理. *设 $f\in A$.*

(i) *$f(u)$ 是正常算子, 且是 u 和 u^* 的多项式的范数极限;*

(ii) $\bar{f}(u)=f(u)^*$;

(iii) *若 f 是实值函数, 则 $f(u)$ 是 Hermite 函数;*

(iv) *若 $c,d\in\mathbb{R}$ 满足 $c\leqslant f\leqslant d$, 则 $c\leqslant f(u)\leqslant d$;*

(v) $\|f(u)\|\leqslant\|f\|$.

这个定理的证明和定理 5.1.6 的证明是完全类似的.

5.5.7 设 $x\in E$. 由 A 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $f\mapsto(f(u)x|x)$ 是 $\mathrm{Sp}\,u$ 上的测度, 总质量为 $(x|x)$, 称为**由 x 和 u 定义的谱测度**.

5.5.8　定理.　设 E 是一个 Hilbert 空间，u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元，$(f_1, f_2, \cdots)$ 是 A 中简单收敛于函数 f 的一列有界连续复值函数. 那么序列 $(f_1(u), f_2(u), \cdots)$ 强收敛于 $\mathcal{L}(E)$ 中的一个元素，且这个极限只依赖于 f 和 u，而和序列 (f_n) 无关.

这个定理的证明和定理 5.3.2 的证明是完全类似的.

5.5.9　以 $\widehat{A}$ 记 $\mathrm{Sp}\, u$ 上可以作为一列有界连续复值函数的简单极限的函数全体. 对于 $f \in \widehat{A}$，5.5.8 中定义的 $\mathcal{L}(E)$ 中元素记作 $f(u)$. 如前所述，对于一个定义域包含 $\mathrm{Sp}\, u$ 的函数 f 都可以应用记号 $f(u)$，如果 $f|_{\mathrm{Sp}\, u} \in \widehat{A}$ 的话.

5.5.10　定理.　设 $E, u, \widehat{A}$ 如上所述.

(i) 由 $\widehat{A}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射 $f \mapsto f(u)$ 是从 $\widehat{A}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的一个交换子代数的同态；

(ii) 对 $f \in \widehat{A}$，我们有 $\bar{f}(u) = f(u)^*$；

(iii) 若 $f \in \widehat{A}$ 是实的，则 $f(u)$ 是 Hermite 元；

(iv) 若 $f \in \widehat{A}$，$c, d \in \mathbb{R}$ 满足 $c \leqslant f \leqslant d$，则 $c \leqslant f(u) \leqslant d$；

(v) 若 $f \in \widehat{A}$，则 $f(u)$ 是正常元，且是 u 和 u^* 的一列多项式的强极限；

(vi) 对 $f \in \widehat{A}$，我们有 $\|f(u)\| \leqslant \|f\|$；

(vii) 设 $(f_1, f_2, \cdots)$ 是简单收敛于 $\widehat{A}$ 中元素 f 的一个有界序列，那么 $(f_n(u))$ 强收敛于 $f(u)$；

(viii) 设 $x \in E$，μ_x 是 x 和 u 定义的谱测度，我们有，对于 $f \in \widehat{A}$，

$$(f(u)x|x) = \int_{\mathrm{Sp}\, u} f(t)\, \mathrm{d}\mu_x(t);$$

(ix) 利用同样的记号，

$$\|f(u)x\|^2 = \int_{\mathrm{Sp}\, u} |f(t)|^2\, \mathrm{d}\mu_x(t).$$

这个定理的证明和定理 5.3.5 的证明是完全类似的.

5.5.11　定理.　设 E 是一个 Hilbert 空间，u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元. 对于任意的 $z \in \mathbb{C}$，设 e_z 是在 $(-\infty, \mathrm{Re}\, z] \times (-\infty, \mathrm{Im}\, z]$ 上取值为 1，而在其补集上取值为 0 的 $\mathbb{C}$ 上函数.

(i) 每个 e_z 是一列有界连续函数的简单极限，这样 $p_z = e_z(u)$ 是可以定义的；

(ii) 每个 p_z 都是投影，且是 u 和 u^* 的一列多项式的强极限；

(iii) 设 $z, z' \in \mathbb{C}$，若 $\mathrm{Re}\, z \leqslant \mathrm{Re}\, z'$ 而 $\mathrm{Im}\, z \leqslant \mathrm{Im}\, z'$，我们有 $p_z \leqslant p_{z'}$；

(iv) 若 $\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}\, m_v$ 而 $\mathrm{Im}\, z < \mathrm{Im}\, m_w$，则 $p_z = 0$；

(v) 若 $\mathrm{Re}\, z \geqslant \mathrm{Re}\, M_v$ 而 $\mathrm{Im}\, z \geqslant \mathrm{Im}\, M_w$，则 $p_z = 1$；

(vi) 设 $z \to z_0$ 满足 $\mathrm{Re}\, z \geqslant \mathrm{Re}\, z_0$ 而 $\mathrm{Im}\, z \geqslant \mathrm{Im}\, z_0$，那么 p_z 强收敛于 p_{z_0}.

这个定理的证明和定理 5.4.1 的证明是完全类似的.

5.5.12　利用 5.5.11 中的记号，我们称 $(p_z)_{z\in\mathbb{C}}$ 是 u **对应的恒等映射的复分解**.

5.5.13 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是和 h 关联的恒等映射的分解.

(i) 设 x 是 E 中的元素, μ_x 是由 x 和 h 定义的谱测度, 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\mu_x((-\infty,\operatorname{Re}z]\times(-\infty,\operatorname{Im}z])=(p_z x|x)=\|p_z x\|^2;$$

(ii) 每个 $p_z(E)$ 都化简 u;

(iii) 对于 $[m_v-1,M_v]$ 和 $[m_w-1,M_w]$ 的任意一对分割 $\sigma=((\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n),(\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_t))$, 定义

$$u_\sigma=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{t-1}(\lambda_j+\mathrm{i}\mu_k)(p_{\lambda_{j+1}+\mathrm{i}\mu_{k+1}}-p_{\lambda_{j+1}+\mathrm{i}\mu_k}-p_{\lambda_j+\mathrm{i}\mu_{k+1}}+p_{\lambda_j+\mathrm{i}\mu_k}),$$

这样当 $\sup\limits_j|\lambda_j-\lambda_{j-1}|\to 0$ 和 $\sup\limits_k|\mu_k-\mu_{k-1}|\to 0$ 时, u_σ 依范数收敛于 h;

(iv) 设 $w\in\mathcal{L}(E)$, 为使 w 和 u, u^* 可交换, 必须且只需对于任意的 $z\in\mathbb{C}$, w 和 p_z 可交换.

这个定理的证明和定理 5.4.6, 定理 5.4.8 的证明是完全类似的.

5.5.14 我们形式地记

$$u=\iint\limits_{\operatorname{Sp}u} z\,\mathrm{d}p_z,$$

或

$$u=\iint\limits_{\mathbb{C}} z\,\mathrm{d}p_z,$$

$$u=\int_{m_v}^{M_v}\int_{m_w}^{M_w} z\,\mathrm{d}p_z.$$

5.6 酉算子的谱分解

5.6.1 设 E 是 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的酉元. 则 u 是正常算子, 我们可以应用 5.5 中的结果. 另一方面, (根据 3.6.10) $\operatorname{Sp}u$ 包含在模长为 1 的复数集 $\mathbb{U}$ 中.

5.6.2 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 设 f_λ 是 $\mathbb{U}$ 上满足下述条件的复值函数:

a) 若 $\lambda<0$, 则 $f_\lambda=0$;

b) 若 $0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$, 则对于 $0\leqslant x\leqslant\lambda$ 有 $f_\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})=1$, 对于 $\lambda<x<2\pi$ 有 $f_\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})=0$;

c) 若 $\lambda>2\pi$, 则 $f_\lambda=1$.

易见, 每一个 f_λ 都是一列有界连续函数的简单极限. 记 $f_\lambda(u)=p_\lambda$.

定理. (i) 每个 p_λ 都是投影, 且是 u 和 u^* 的一列多项式的强极限;

(ii) $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是恒等映射的一个分解, 满足: 对于 $\lambda<0$, $p_\lambda=0$; 对于 $\lambda\geqslant 2\pi$, $p_\lambda=1$.

我们有 $f_\lambda=\overline{f_\lambda}=f_\lambda^2$, 因此 (根据 5.5.10(i) 和 (ii)), $p_\lambda=p_\lambda^*=p_\lambda^2$. 因此 (根据 5.5.10(v)) p_λ 是一个投影, 且是 u 和 u^* 的一列多项式的强极限.

若 $\lambda\leqslant\mu$, 我们有 $f_\lambda\leqslant f_\mu$, 因此 (根据 5.5.10(iv)), $p_\lambda\leqslant p_\mu$. 若 $\lambda<0$, 我们有 $f_\lambda=0$, 因此 $p_\lambda=0$. 若 $\lambda\geqslant 2\pi$, 我们有 $f_\lambda=1$, 因此 $p_\lambda=1$. 当 $n\to+\infty$ 时, 序列 $(f_{\lambda+1/n})$ 简单收敛于 f_λ, 因此 $(p_{\lambda+1/n})$ 强收敛于 p_λ, (根据 5.5.10(vii)) 从而 $p_{\lambda+}=p_\lambda$.

5.6.3 5.6.2 中考虑的恒等映射 p_λ (相应地, E) 的分解称作和 u **关联的恒等映射** (相应地, E) **的分解**.

因为当 $n\to+\infty$ 时 $(f_{2\pi+1/n})$ 简单收敛于 $(f_{2\pi})$, 所以这个分解在 2π 是**左连续**的.

5.6.4 考虑从 $[0,2\pi)$ 到 $\mathbb{U}$ 的双射 $\lambda\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$, 并设 f 是其逆. 易见 f 是 $\mathbb{U}$ 上一列有界连续函数的简单极限.

记 $f(u)=h$.

定理. (i) h 是 Hermite 算子, 且 $0\leqslant h\leqslant 2\pi$;

(ii) (p_λ) 是和 h 对应的恒等映射的分解;

(iii) $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}h}$.

(很自然地, 我们以 $l(h)$ 记算子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}h}$, 其中 l 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $x\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.)

(i) 由 5.5.10(iv) 可证.

(ii) 和 5.4.1 中一样定义 e_λ, 并设 $(k_1,k_2,\cdots)$ 是 $\mathbb{C}[X]$ 中简单收敛于 l 且在 $[0,2\pi]$ 上保持有界的一列元素. 这样每个 $k_n\circ f$ 都是 $\mathbb{U}$ 上一列有界连续函数的简单极限, 且序列 $(k_1\circ f,k_2\circ f,\cdots)$ 简单收敛于 $e_\lambda\circ f=f_\lambda$, 并在 $\mathbb{U}$ 上保持有界. 根据 5.5.10(i), 我们有

$$k_n(h)=k_n(f(u))=(k_n\circ f)(u).$$

当 $n\to+\infty$ 时, (根据 5.3.5(vii)) $k_n(h)$ 强收敛于 $e_\lambda(h)$, 且 (根据 5.5.10(vii)) $(k_n\circ f)(u)$ 强收敛于 $f_\lambda(u)$, 即得

$$e_\lambda(h)=p_\lambda.$$

这就证明了 (ii).

(iii) 设 $(k_1',k_2',\cdots)$ 是 $\mathbb{C}[X]$ 中简单收敛于 l 且在 $[0,2\pi]$ 上保持有界的一列元素. 和 (ii) 作同样的推理, 我们有

$$k_n'(h)=(k_n'\circ f)(u),$$

取极限即得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}h}=u.$$

5.6.5 利用 5.4.7 中的记号, 我们有

$$\boxed{u = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\, \mathrm{d}p_\lambda.}$$

5.7 正常算子和乘法算子

5.7.1 设 X 是一个局部紧拓扑空间, μ 是 X 上的一个正 Radon 测度, g 是 X 上的一个有界可测函数. $E = L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x)$ 上的映射 $g \mapsto gf$ 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元 (参见 2.1.13 和 3.1.4). 我们将看到, 在相差一个同构的意义下, 这样我们可以得到**所有**的连续正常算子.

5.7.2 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元, $x \in E$. 我们称 x 对于 u 是完全的, 若向量集 $u^m u^{*n} x$ (对于 $m, n = 0, 1, 2, \cdots$) 在 E 中是完全的, 换句话说, 若集合 $p(u, u^*)x$ (其中 $p \in \mathbb{C}[X, Y]$) 是 E 的一个稠密子空间.

5.7.3 引理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元.*

(i) 若 $E \neq \{0\}$, 则存在 E 的闭线性子空间 F 化简 u, 且存在 $x \in F$ 对于 $u|_F$ 是完全的.

(ii) 存在 E 的一族闭线性子空间 $(F_i)_{i\in I}$ 和一族 E 中元素 $(x_i)_{i\in I}$, 满足:

a) $E = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$;

b) 每个 F_i 都化简 u;

c) 对于任意的 $i \in I$, x_i 对于 $u|_{F_i}$ 是完全的.

(i) 设 x 是 E 中非零元素. 设 F 是 E 中由 $u^m u^{*n} x$ (对于 $m, n = 0, 1, 2, \cdots$) 全体生成的闭线性子空间. 显然 F 是在 u 和 u^* 之下稳定的, 且 x 对于 $u|_F$ 是完全的.

(ii) 设 $\mathcal{S}$ 是 E 中化简 u 且使得 $u|_F$ 具有一个完全向量的闭线性子空间 F 全体. 设 $\mathscr{M}$ 是 $\mathcal{S}$ 中元素两两正交的子集全体构成的集合. 设 $(\mathcal{M}_\alpha)$ 是 $\mathscr{M}$ 中依包含关系构成全序的一族元素, 我们有

$$\bigcup \mathcal{M}_\alpha \in \mathscr{M}.$$

因此 $\mathscr{M}$ 依包含关系是归纳的.

设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一个极大元. 给 $\mathcal{M}$ 的每个元素一个指标, 我们得到 E 的一族化简 u 的闭线性子空间 $(F_i)_{i\in I}$, 且对于任意的 $i \in I$, 存在 x_i 对于 $u|_{F_i}$ 是完全的. 假设

$$E' = E \ominus \left(\bigoplus_{i\in I} E_i \right)$$

非零. 根据 (i), 存在 E 的一个闭线性子空间 $F \neq \{0\}$ 和所有的 F_i 均正交, 且化简 u, 并且 $u|_F$ 有一个完全向量. 这就和 $\mathcal{M}$ 的极大性矛盾, 从而

$$E = \bigoplus_{i \in I} F_i.$$

5.7.4　引理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元, x 对于 u 是完全的, μ_x 是相应的谱测度, A 是 $\operatorname{Sp} u$ 上的连续复值函数全体, f_0 是 $\operatorname{Sp} u$ 上的函数 $z \mapsto z$.

(i) 从 A 到 E 的映射 $f \mapsto f(u)x$ 可以唯一地扩张成从 $L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x)$ 到 E 的同构 j;

(ii) 算子 $j^{-1}uj$ 是 $L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x)$ 上由 f_0 定义的乘法算子.

设 j 是从 A 到 E 的映射 $f \mapsto f(u)x$. 它是线性的. 根据 5.5.10(ix), 我们有

$$\|j'(f)\|^2 = \int_{\operatorname{Sp} u} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu_x.$$

因为 A 在 $L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x)$ 中是稠密的, j' 有唯一的等距扩张 $j : L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x) \to E$. 对于任意的 $p \in \mathbb{C}[X, Y]$, 我们有 $p(u, u^*)x \in j'(A)$, 因此 $j'(A)$ 在 E 中稠密. 从而 $j(L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x)) = E$, 这就证明了 (i).

设 v 是 $L^2(\operatorname{Sp} u, \mu_x)$ 上由 f_0 定义的乘法算子. 对于任意的 $f \in A$, 我们有

$$(j^{-1}uj)(f) = (j^{-1}u)(f(u)x) = (j^{-1})((f_0 f)(u)x) = f_0 f = v(f).$$

这样, $j^{-1}uj|_A = v|_A$, 由连续性即得 $j^{-1}uj = v$.

5.7.5　定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个正常元. 存在一个局部紧拓扑空间 X, X 上的一个正 Radon 测度 μ, X 上的一个有界连续函数 g, 和一个从 $L^2(X, \mu)$ 到 E 的同构 j, 使得算子 $j^{-1}uj$ 是 $L^2(X, \mu)$ 上由 g 定义的乘法算子.

根据 5.7.3(ii), 我们可以假设

$$E = \bigoplus_{i \in I} F_i \quad 和 \quad u = \bigoplus_{i \in I} u_i,$$

每个 u_i 都有一个完全向量. 根据 5.7.4, 对于任意的 $i \in I$, 存在一个局部紧拓扑空间 X_i, X_i 上的一个正 Radon 测度 μ_i, 和一个从 $L^2(X_i, \mu_i)$ 到 F_i 的同构 j_i, 把 u_i 变成由 X_i 上的一个有界连续函数 g_i 定义的乘法算子 u_{g_i}, 其中 g_i 满足

$$\sup |g_i| \leqslant \|u_i\| \leqslant \|u\|.$$

设局部紧空间 X 是 X_i 的和: 每个 X_i 都是 X 中开集, 而 X 是 X_i 的无交并; 设 μ 是 X 上的正 Radon 测度, 其在 X_i 上的限制就是 μ_i. 设 g 是 X 上对于任意的 i 满足 $g|_{X_i} = g_i$ 的函数. 显然 g 是连续的. 每一个 $L^2(X_i, \mu_i)$ 都等同于 $L^2(X, \mu)$ 的一个闭线性子空间, 且

$$L^2(X, \mu) = \bigoplus_{i \in I} L^2(X_i, \mu_i).$$

这样全体 j_i 就定义了一个从 $L^2(X, \mu)$ 到 E 的等距, 它把 u 变成 $\bigoplus u_{g_i} = u_g$ (由 g 定义的乘法算子).

VI (无界) 线性算子

6.1 概述

6.1.1 设 E, F 是 Hilbert 空间, D 是 E 的一个线性子空间, u 是从线性空间 D 到线性空间 F 的一个线性算子. 我们称 D 是 u 的**定义域**, 记为 $D(u)$. 我们也称 u 是一个以 D 为定义域的**从 E 到 F 的线性算子**. 在下文中我们将省略 "线性" 这个形容词.

一个从 E 到 F 的 (按照第 II 章定义的) 线性算子按照上面的定义, 是一个定义在整个空间 E 上且取值在 F 中的算子.

6.1.2 设 u_1, u_2 是从 E 到 F 的算子. 我们用 $u_1 \supset u_2$ 或者 $u_2 \subset u_1$ 来表达 "u_1 是 u_2 的扩张".

6.1.3 设 u_1, u_2 是从 E 到 F 的算子. 我们用 $u_1 + u_2$ 表示从 E 到 F 的一个算子, 它的定义域是 $D = D(u_1) \cap D(u_2)$, 且对于任意的 $x \in D$, 成立 $(u_1 + u_2)x = u_1x + u_2x$.

6.1.4 设 u 是从 E 到 F 的一个算子, $\lambda \in \mathbb{C}$. 我们用 λu 表示从 E 到 F 的一个算子, 它的定义域是 $D = D(u)$, 且对于任意的 $x \in D$, 成立 $(\lambda u)x = \lambda(ux)$.

6.1.5 设 E, F, G 是 Hilbert 空间, u_1 是从 E 到 F 的算子, u_2 是从 F 到 G 的算子. 根据集合论的惯例, 我们用 $u_2 \circ u_1$ 或者 u_2u_1 来表示映射 $x \mapsto u_2(u_1x)$, 它定义在满足 $u_1x \in D(u_2)$ 的那些 $x \in D(u_1)$ 组成的集合上. 这是一个从 E 到 G 的算子.

6.1.6　设 u 是从 E 到 F 的一个算子, 且是一个单射. 那么 u^{-1} 是从 F 到 E 的一个算子.

6.1.7　设 u 是从 E 到 F 的一个算子. 根据集合论的惯用定义, 我们定义由 $E \times F$ 中所有形如 (x, ux) $(x \in D(u))$ 的元素构成的集合 G 为 u 的**图像**. 根据 1.9.1 和 1.9.2, 我们有一种典范的方式把 $E \times F$ 定义为一个 Hilbert 空间, 记为 $E \oplus F$. 空间 E, F 可以看成是 $E \oplus F$ 中的闭线性子空间. 从而我们马上可以知道 G 也是 $E \oplus F$ 的一个线性子空间, 它完全决定 u. 既然 $P_E((x, ux)) = x$, $P_F((x, ux)) = ux$, 我们有

$$D(u) = P_E(G), \tag{1}$$

$$\operatorname{Im} u = P_F(G). \tag{2}$$

从 $D(u)$ 到 G 的映射 $x \mapsto (x, ux)$ 是从 $D(u)$ 到 G 的一个双射, 记作 φ. 我们把 G 上的准 Hilbert 空间结构在 φ^{-1} 变换下的像称为 $D(u)$ 的**图像准** Hilbert **空间结构**. 如果 $x, y \in D(u)$, 那么 x 和 y 关于这个图像准 Hilbert 空间结构的内积 $(x|y)_u$ 是

$$(x|y)_u = ((x, ux)|(y, uy)) = (x|y) + (ux|uy).$$

6.1.8　设 u_1, u_2 是从 E 到 F 的算子, G_1, G_2 是它们的图像. 我们有

$$u_1 \subset u_2 \Leftrightarrow G_1 \subset G_2.$$

6.1.9　**定理.**　*设 E, F 是 Hilbert 空间, G 是 $E \oplus F$ 的一个线性子空间. 那么 G 是一个从 E 到 F 的算子的图像的充要条件是 $G \cap F = \{0\}$.*

设 G 是从 E 到 F 的算子 u 的图像. 设 $(x, y) \in G \cap F$. 因为 $(x, y) \in G$, 我们有 $y = ux$. 因为 $(x, y) \in F$, 我们有 $x = 0$. 从而 $y = 0$, $(x, y) = (0, 0)$. 所以 $G \cap F = \{0\}$.

现在假设 $G \cap F = \{0\}$. 记 $D = P_E G$. 这是 E 的一个线性子空间. 对于 $x \in D$, 存在 $z \in G$, 使得 $x = P_E z$; 而 z 是唯一的, 因为如果有 $z' \in G$ 满足 $P_E z' = x$, 那么我们有 $z - z' \in G \cap F = \{0\}$, 于是 $z = z'$. 元素 z 具有形式 (x, y), 其中 y 是 F 的一个确定的元素. 定义 $y = ux$. 我们马上可以验证, u 是一个从 E 到 F 的算子, 图像为 G.

6.1.10　设 E 是一个 Hilbert 空间, u 和 v 是 E 中算子 (即从 E 到 E 的算子). 我们自然想用条件 $uv = vu$ 来定义 u 和 v 的可交换性. 但是这个条件限制太多了. 例如, u 和 $\mathcal{L}(E)$ 中的 0 元素一般是不可交换的, 因为一方面我们有 $u \circ 0 = 0$, 但是另一方面, $0 \circ u$ 就是 0 在 $D(u)$ 上的限制了. 经验表明, 下面的定义是有用的:

定义. *设 $u \in \mathcal{L}(E)$, v 是 E 上的算子. 我们称 u 和 v 是可交换的, 如果 $uv \subset vu$.*

如果 $v \in \mathcal{L}(E)$, 我们重新得到通常的定义. 我们不对任意的两个 E 上算子 u 和 v 定义它们的可交换性.

6.1.11 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, 且 $u\in\mathcal{L}(E)$.

(i) 设 v_1, v_2 是 E 上的算子, 如果 u 与 v_1 和 v_2 均可交换, 那么 u 也和 v_1+v_2 以及 v_1v_2 可交换;

(ii) 设 v 是 E 中算子, 且是单射, 如果 u 和 v 可交换, 那么 u 也和 v^{-1} 可交换;

(iii) 设 (v_n) 是 E 中一列算子, 设 D 是由所有使得 (v_nx) 在 $n\to+\infty$ 时有极限的 $x\in\bigcap D(v_n)$ 构成的集合, 并且对于 $x\in D$, 我们定义 $vx=\lim v_nx$, 如果 u 和 v_n 都可交换, 那么 u 和 v 也可交换.

(i) 这是显然的.

(ii) 设 v 是 E 中算子, 且是单射, 并设 $uv\subset vu$. 如果 $x\in D(v^{-1})$, 那么我们有 $ux=uvv^{-1}x=vuv^{-1}x$, 因此 $ux\in D(v^{-1})$ 且 $v^{-1}ux=uv^{-1}x$. 这就证明了 $uv^{-1}\subset v^{-1}u$.

(iii) 考虑如定理 (iii) 中所述的一列 (v_n) 和 v. 设 $x\in D(v)=D$. 于是由 $u\in\mathcal{L}(E)$ 可知 $v_nux=uv_nx$ 收敛到 uvx. 从而有 $ux\in D$, 以及 $vux=uvx$. 这就证明了 $uv\subset vu$.

6.1.12 定义. 设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个线性闭子空间, u 是 E 中算子. 我们称 F 化简 u, 如果 P_F 和 u 可交换.

(根据 6.1.11(i)) 这等价于 $F^{\perp}$ 化简 u.

根据 3.4.9(ii), 对于 $u\in\mathcal{L}(E)$, 定义 6.1.12 就化简为定义 2.5.15.

6.1.13 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个线性闭子空间, u 是 E 中被 F 化简的一个算子. 设 $D_1=F\cap D(u)$, $D_2=F^{\perp}\cap D(u)$.

(i) 设 $x\in E$, 为使得 $x\in D(u)$, 必须且只需 $P_Fx\in D_1$, 且 $P_{F^\perp}x\in D_2$;

(ii) 如果 $x\in D_1$, 那么我们有 $ux\in F$. 如果 $x\in D_2$, 那么我们有 $ux\in F^{\perp}$.

如果 $x\in D(u)$, 我们有 $x\in D(P_Fu)\subset D(uP_F)$, 因此 $P_Fx\in D(u)$, 并且由此可知 $P_Fx\in D_1$; 同理, $P_{F^\perp}x\in D_2$. 如果 $P_Fx\in D_1$ 且 $P_{F^\perp}x\in D_2$, 那么我们就有

$$x=P_Fx+P_{F^\perp}x\in D_1+D_2\subset D(u)+D(u)\subset D(u).$$

这就证明了 (i).

如果 $x\in D_1$, 那么我们有 $P_Fux=uP_Fx=ux$, 因此 $ux\in F$. 同理, 如果 $x\in D_2$, 那么我们有 $ux\in F^{\perp}$. 这就证明了 (ii).

6.1.14 设 $(E_i)_{i\in I}$, $(F_i)_{i\in I}$ 是两族 Hilbert 空间, $E=\bigoplus\limits_{i\in I}E_i$, $F=\bigoplus\limits_{i\in I}F_i$. 对于任意的 $i\in I$, 设 u_i 是一个从 E_i 到 F_i 的算子. 设 D 是由所有满足 $x_i\in D(u_i)$ 且 $\sum\limits_{i\in I}\|u_ix_i\|^2<+\infty$ 的 $(x_i)\in E$ 构成的集合. 那么 (u_ix_i) 是 F 的元素, 记为 ux. 显然我们这样就定义了一个从 E 到 F 的算子 u. 我们称之为 u_i 的 Hilbert **和**, 记为 $\bigoplus\limits_{i\in I}u_i$.

对于任意的 i, 我们有 $D(u)\cap E_i = D(u_i)$, 且 $u|_{D(u_i)} = u_i$. 注意 $D(u)\supset \sum_{i\in I} D(u_i)$.

如果对于任意的 i 都有 $u_i\in\mathcal{L}(E_i;F_i)$, 且 $\sup\|u_i\|<+\infty$, 我们就重新得到定义 2.2.8.

6.1.15 例. 设 D 是所有使得函数 $t\mapsto g(t)=tf(t)$ 仍然属于 $L^2(\mathbb{R})$ 的 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 全体构成的集合. 我们定义 $uf=g$. 则 u 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子, 其定义域 $D(u)=D$. 我们将看到 u 可以表示成一族连续线性算子的 Hilbert 和. 对于任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 记 E_n 为所有在 $[n,n+1)$ 外取值为 0 的函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 全体构成的集合. 我们马上得到 $L^2(\mathbb{R})=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n$. 因为函数 $t\mapsto t$ 在每个区间 $[n,n+1)$ 上都是有界的, 所以对于任意的 n, 我们都有 $E_n\subset D(u)$, 且 $u_n=u|_{E_n}$ 是 E_n 上的一个连续线性算子. 设 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 我们可以有 $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$, 其中 $f_n\in E_n$. 我们有

$$\begin{aligned} f\in D(u) &\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_m^{n+1}|f(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|u_nf_n\|^2<+\infty; \end{aligned}$$

并且若该条件满足, 我们就有 $uf=\sum_n u_nf_n$. 因此 $u=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} u_n$.

6.2 算子的共轭

6.2.1 设 E,F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的算子, 且 $D(u)$ **在 E 中稠密**. 设 D^* 是由满足下述条件的 $y\in F$ 构成的集合:

$$\text{存在 } z\in E, \text{使得对于任意 } x\in D(u),\ (ux|y)=(x|z).$$

元素 z 由 y 唯一确定; 因为如果对于任意 $x\in D(u)$, $(ux|y)=(x|z')$, 那么 $z-z'$ 就和 $D(u)$ 正交, 从而是 0. 我们以 u^* 记从 D^* 到 E 的映射 $y\mapsto z$.

设 $y_1\in D^*$, $z_1=u^*y_1$. 对于任意的 $x\in D(u)$, 我们有

$$(ux|y+y_1)=(ux|y)+(ux|y_1)=(x|u^*y)+(x|u^*y_1)=(x|u^*y+u^*y_1),$$

因此 $y+y_1\in D^*$, 且 $u^*(y+y_1)=u^*y+u^*y_1$. 同样我们可以得到, 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有 $\lambda y\in D^*$, 以及 $u^*(\lambda y)=\lambda u^*y$.

所以 D^* 是 F 的一个线性子空间, u^* 是一个从 F 到 E 的算子, 称为 u 的**共轭**. 从 u^* 的定义我们可以知道 $D(u^*)=D^*$, 且对于 $x\in D(u)$, $y\in D(u^*)$, 成立

$$(ux|y)=(x|u^*y).$$

对于一个从 E 到 F 的算子 u, 称它的共轭有定义, 就意味着 $D(u)$ 在 E 中是稠密的.

当 $u \in \mathcal{L}(E;F)$ 时, 显然我们可以看到这个定义和定义 2.5.1 是一样的.

6.2.2 设 u, v 是从 E 到 F 的算子, 且 $\overline{D(u)} = E$. 则

$$u \subset v \Leftrightarrow v^* \subset u^*.$$

事实上, 如果 $y \in D(v^*)$, 那么对于任意的 $x \in D(u)$, 我们都有

$$(ux|y) = (vx|y) = (x|v^*y),$$

所以 $y \in D(u^*)$, 且 $u^*y = v^*y$.

6.2.3 设 u, v 是从 E 到 F 的算子, 且 $\overline{D(u)} = E$. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. 我们容易验证

$$(u+\lambda)^* = u^* + \bar{\lambda}, \ \ (\mu u)^* = \bar{\mu} u^*.$$

6.2.4 定理. 设 u 是从 E 到 F 的一个算子, 且 $\overline{D(u)} = E$, $G \subset E \oplus F$ 是它的图像. 设 $G^* \subset F \oplus E$ 是 u^* 的图像. 设 α 是从 $E \oplus F$ 到 $F \oplus E$ 的一个同构映射, 对于 $x \in E$, $y \in F$, $\alpha((x,y)) = (y,-x)$. 那么

$$G^* = (\alpha(G))^{\perp} = \alpha(\overline{G})^{\perp} = \alpha(G^{\perp}) = \alpha(\overline{G}^{\perp}).$$

事实上, 对于 $y \in F$, $z \in E$, 我们考虑 $F \oplus E$ 的元素 (y,z). 我们有

$$\begin{aligned}(y,z) \in G^* &\Leftrightarrow y \in D(u^*) \text{ 且 } z = u^*y \ (\text{根据 } G^* \text{ 的定义})\\ &\Leftrightarrow \text{对于任意 } x \in D(u), (ux|y) = (x|z) \ (\text{根据 } u^* \text{ 的定义})\\ &\Leftrightarrow \text{对于任意 } x \in D(u), ((ux,-x)|(y,z)) = (x|z) \ (\text{根据 } F \oplus E \text{ 的定义})\\ &\Leftrightarrow \text{对于任意 } x \in D(u), (\alpha(x,ux)|(y,z)) = (x|z) \ (\text{根据 } \alpha \text{ 的定义})\\ &\Leftrightarrow (y,z) \text{和 } \alpha(G) \text{ 正交 } (\text{根据 } G \text{ 的定义}).\end{aligned}$$

6.2.5 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的算子, 且是单射; 我们假设 $\overline{D(u)} = E$ 以及 $\overline{\operatorname{Im} u} = F$, 这样 u^* 和 $(u^{-1})^*$ 都是有定义的. 那么 u^* 也是单射, 并且 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

如果 $x \in D(u^*)$ 满足 $u^*x = 0$, 那么对于任意 $y \in D(u)$, 我们都有

$$(x|uy) = (u^*x|y) = 0;$$

从而 $x \in \operatorname{Im}(u)^{\perp}$, 因此 $x = 0$; 所以 u^* 是单射.

对于 $x \in E$, $y \in F$, 我们定义 $\alpha((x,y)) = (y,-x)$, $\alpha'((y,x)) = (x,-y)$, $\beta((x,y)) = (y,x)$, $\beta'((y,x)) = (x,y)$. 设 G, G^* 分别是 u 和 u^* 的图像. 显然, u^{-1} 和 $(u^*)^{-1}$ 的图像分别是 $\beta(G)$ 和 $\beta'(G)$. 根据 6.2.4, 我们有 $G^* = \alpha(G)^{\perp}$, 所以

$$\beta'(G^*) = \beta'(\alpha(G)^{\perp}) = \beta'(\alpha(G))^{\perp}.$$

另一方面, $(\alpha' \circ \beta)((x,y)) = \alpha'((y,x)) = (x,-y) = \beta'((-y,x)) = -(\beta' \circ \alpha)((x,y))$, 从而我们有

$$\beta'(G^*) = -\alpha'(\beta(G))^{\perp} = \alpha'(\beta(G))^{\perp}.$$

对 u^{-1} 应用 6.2.4, 我们就得到 $(u^{-1})^*$ 的图像是 $\alpha'(\beta(G))^{\perp}$, 定理得证.

6.2.6　我们沿用 6.1.14 中的记号. 假设对于任意的 i, $D(u_i)$ 在 E_i 中都是稠密的. 那么 $\sum\limits_{i\in I} D(u_i)$ 在 E 中稠密, 从而 D 亦然. 设 $u' = u|_{\sum\limits_{i\in I} D(u_i)}$. 我们来证明

$$u'^* = u^* = \bigoplus_{i\in I} u_i^*.$$

为此我们记 $v = \bigoplus\limits_{i\in I} u_i^*$.

a) 我们先证明 $v \subset u^*$. 设 $x = (x_i) \in D(u)$, $y = (y_i) \in D(v)$, 那么 $(u_i x_i | y_i)$ 是一个可和数族, 且我们有

$$(ux|y) = \sum_{i\in I} (u_i x_i | y_i) = \sum_{i\in I} (x_i | u_i^* y_i) = (x|vy),$$

所以 $y \in D(u^*)$ 且 $vy = u^* y$.

b) 根据 6.2.2, 我们有 $u^* \subset u'^*$.

c) 现在只要来证明 $D(u'^*) \subset D(v)$ 就可以了. 设 $z = (z_i) \in D(u'^*)$, 并记 $u'^* z = (t_i)$. 对于任意的 $x = (x_i) \in D(u')$, 我们有

$$\sum_{i\in I} (u_i x_i | z_i) = (u'x|z) = (x|u'^* z) = \sum_{i\in I} (x_i | t_i).$$

首先, 对于 $j \neq i$ 取 $x_j = 0$, 我们可以得到, 对于任意 $x_i \in D(u_i)$, 有 $(u_i x_i | z_i) = (x_i | t_i)$; 从而 $z_i \in D(u_i^*)$, 且 $u_i^* z_i = t_i$. 于是我们就得到

$$\sum_{i\in I} \|u_i^* z_i\|^2 = \sum_{i\in I} \|t_i\|^2 < +\infty,$$

所以 $(z_i) \in D(v)$.

6.2.7　**例.**　利用 6.1.15 中的记号. 根据 3.2.4, 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有 $u_n^* = u_n$. 因此根据 6.2.6, $u^* = u$.

6.2.8 例. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一组标准正交基, $(\alpha_i)_{i\in I}$ 是一族复数. 我们记 D 为所有满足 $\sum_{i\in I}|\alpha_i\lambda_i|^2<+\infty$ 的 $x=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\in E$ 构成的集合. 对于每个这样的 x, 我们定义

$$ux=\sum_{i\in I}\alpha_i\lambda_i e_i\in E.$$

这样就定义了一个 E 上的算子 u, $D(u)=D$. 这个算子是 $\mathbb{C}e_i$ 上系数为 α_i 的位似变换的 Hilbert 和. 根据 6.2.6, u^* 是有定义的, $D(u^*)=D$, 且对于 $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\in D$, 我们有

$$u^*\left(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\right)=\sum_{i\in I}\overline{\alpha_i}\lambda_i e_i.$$

这个例子是例 2.1.11 的推广.

6.3 闭算子

6.3.1 定理. 设 E,F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的算子, 且是单射. 下述条件是等价的:

(i) u 的图像是闭的;

(ii) 对于满足 (x_n) 和 (ux_n) 分别以 x 和 y 为极限的 $D(u)$ 中任意一列元素 (x_n), 我们有 $x\in D(u)$, 且 $y=ux$;

(iii) 具有图像准 Hilbert 空间结构的 $D(u)$ 是一个 Hilbert 空间.

事实上, 条件 (ii) 所表达的就是, 如果 G 中的一列元素收敛, 那么极限也在 G 中. 所以 (ii)⇔(i). 条件 (iii) 则是说 G 是完备的. 因此 (iii)⇔(i).

6.3.2 定义. 我们称满足 6.3.1 中条件的算子为闭算子.

6.3.3 例. 如果 $u\in\mathcal{L}(E;F)$, 那么 u 满足 6.3.1 中的条件 (ii), 因此 u 是闭的.

6.3.4 例. 如果 u 是从 E 到 F 的一个定义域稠密的算子[①], 那么根据 6.2.4, u^* 是闭算子.

这样, 上文中的 6.2.7 和 6.2.8 提供了一些闭算子的例子.

6.3.5 很明显地, 如果 u 是一个闭算子且是单射, 那么 u^{-1} 也是闭算子.

6.3.6 定理 (von Neumann). 设 E,F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的算子, 图像为 G. 下述条件是等价的:

(i) $\overline{G}\cap F=0$;

---

①译者注: 这样的算子在中文文献中一般称为稠定算子.

(ii) u 有一个闭的扩张;

(iii) 对于满足 $x_n \to 0$ 且 ux_n 收敛到极限 y 的 $D(u)$ 中任意一列元素 (x_n), 我们有 $y=0$.

如果 u^* 有定义, 那么这些条件还和下述条件等价:

(iv) $D(u^*)$ 在 F 中稠密.

(i)⇒(ii): 如果 $\overline{G}\cap F=0$, 那么 $\overline{G}$ 是一个从 E 到 F 的算子 v 的图像 (6.1.9), 这样 v 就是 u 的一个闭扩张.

(ii)⇒(iii): 设 u 有一个闭扩张 v. 设有一列元素 $x_1, x_2, \cdots \in D(u)$ 和 $y\in F$ 满足 $\|x_n\|\to 0$, 且 $\|ux_n - y\|\to 0$. 那么 $\|x_n - 0\|\to 0$, 且 $\|vx_n - y\|\to 0$, 因此由 v 是闭算子可知 $y=v(0)$, 从而 $y=0$.

(iii)⇒(i): 假设条件 (iii) 成立. 设 $y\in\overline{G}\cap F$. 存在 G 中序列 (z_n) 使得 $\|z_n-y\|\to 0$. 对于任意的 n, 我们有 $z_n=(x_n, ux_n)$, 其中 $x_n\in D(u)$. 于是我们有 $\|x_n\|\to 0$, 且 $\|ux_n-y\|\to 0$. 根据条件 (iii) 可知 $y=0$. 所以 $\overline{G}\cap F=0$.

现在假设 u^* 有定义. 我们利用 6.2.4 中的记号 G^* 和 α. 我们注意到, 对于 $y\in F$,

$$y\in D(u^*)^{\perp} \Leftrightarrow \text{对于任意 } x\in D(u^*),\ y \text{ 和 } (x, u^*x) \text{ 都正交} \Leftrightarrow y\in G^{*\perp}. \tag{3}$$

由此

$$\begin{aligned} D(u^*)\text{在 } F \text{ 中稠密} &\Leftrightarrow D(u^*) \text{ 在 } F \text{ 中的正交补是 } 0 \\ &\Leftrightarrow \text{根据 (3)}, F\cap (G^*)^{\perp}=0 \\ &\Leftrightarrow \text{根据 6.2.4}, F\cap\alpha(\overline{G})=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha(F)\cap\alpha(\overline{G})=0 \\ &\Leftrightarrow F\cap\overline{G}=0. \end{aligned}$$

6.3.7 定义. 我们称满足 6.3.6 中条件 (i), (ii), (iii) 的算子为可闭算子.

一个闭算子是可闭的. 为得到其他可闭算子的例子, 我们只需取一个闭算子 v, 然后再把它限制到 $D(v)$ 的一个线性子空间上. 在下文 (8.4) 中, 我们将给出更自然的可闭算子的例子.

6.3.8 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的可闭算子, 图像为 G.

(i) $\overline{G}$ 是 u 的一个闭扩张 v 的图像;

(ii) u 的任意闭扩张都是 v 的扩张.

(i) 我们有 $\overline{G}\cap F=0$, 从而 (i) 是 6.1.9 的推论.

(ii) 如果 u' 是 u 的一个闭扩张, 并设 G' 是它的图像, 那么 G' 是闭的, 且 $G'\supset G$, 因此 $G'\supset\overline{G}$, 且 $u'\supset v$.

6.3.9 定义. 利用 6.3.8 中的记号, 我们称 v 是 u 的闭包, 记作 $v=\overline{u}$.

6.3.10 定理 (von Neumann). 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定可闭算子.

(i) 各次共轭 $u^*, u^{**}, \cdots$ 均可定义;

(ii) $u^{**} = \overline{u}$;

(iii) $u^* = u^{***} = u^{*****} = \cdots, u^{**} = u^{****} = \cdots$.

首先, 因为 $\overline{D(u)} = E$, 所以 u^* 是有定义的, 而因为 $\overline{D(u^*)} = F$, 所以 u^{**} 是有定义的. 利用 6.2.4 中的记号 G, G^*, α, 我们有 $G^* = (F \oplus E) \ominus \alpha(\overline{G})$. 当我们交换 E 和 F 的地位时, 类似于 α, 我们有从 $F \oplus E$ 到 $E \oplus F$ 的同构映射 α', 这里对于 $y \in E$, $x \in F$, $\alpha'((y,x)) = (x, -y)$; 注意到 $\alpha' \circ \alpha = -\mathrm{id}_{E \oplus F}$, 我们有 $\alpha'(G^*) = (E \oplus F) \ominus \alpha'(\alpha(\overline{G})) = (E \oplus F) \ominus \overline{G}$. 将 6.2.4 应用于 u^*, 可以知道 u^{**} 是 $\alpha'(G^*)$ 在 $E \oplus F$ 中的正交补, 也就是 $\overline{G}$. 这就证明了 (ii). 此外, $D(u^{**}) \supset D(u)$ 在 E 中稠密, 所以 u^{***} 是有定义的. 对 u^{**} 应用 6.2.4, 我们可以看到, u^{***} 的图像就是 $(F \oplus E) \ominus \alpha(\overline{G}) = G^*$, 因此 $u^{***} = u^*$, 所以 $u^{***} = u^*$. 定理的余下部分就变得显而易见了.

6.3.11 推论. 设 E, F 是 Hilbert 空间. 以 $\mathscr{F}(E,F)$ (相应地, $\mathscr{F}(F,E)$) 表示从 E 到 F (相应地, 从 F 到 E) 的稠定闭算子全体构成的集合. 那么 $u \mapsto u^*$ 是从 $\mathscr{F}(E,F)$ 到 $\mathscr{F}(F,E)$ 的双射. 它的逆映射是从 $\mathscr{F}(F,E)$ 到 $\mathscr{F}(E,F)$ 的映射 $v \mapsto v^*$.

事实上, 对于 $u \in \mathscr{F}(E,F)$ 定义 $\varphi(u) = u^*$, 对于 $v \in \mathscr{F}(E,F)$ 定义 $\psi(v) = v^*$. 根据 6.3.10, 因为 u 是闭算子, 我们有 $\psi(\varphi(u)) = u^{**} = u$, 同理 $\varphi(\psi(v)) = v^{**} = v$.

6.3.12 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定算子, 而且是连续的. 那么 u 是可闭的. 它只有一个闭扩张, 即 $\overline{u}$. 这个扩张是处处有定义而且是连续的.

根据 2.2.2, u 有一个定义在 E 上的连续扩张 v. 设 G, G' 分别是 u, v 的图像. 我们有 $G \subset G'$, 且 G' 是闭的 (6.3.3), 因此 $\overline{G} \subset G'$. 设 $(x,y) \in G'$. 我们有 $y = vx$. 存在 $D(u)$ 中的一列元素 (x_n) 使得 $x_n \to x$. 这样 $ux_n = vx_n \to vx = y$, 所以 $(x_n, ux_n) \to (x,y)$, 所以 $(x,y) \in \overline{G}$. 从而 $G' = \overline{G}$, 即可得到 $v = \overline{u}$. 如果 w 是 u 的一个闭扩张, w 也是 $\overline{u}$ 的扩张; 但是此时必然有 $D(w) \supset D(v) = E$, 即 $D(w) = E = D(v)$, 因此 $w = v$.

6.3.13 下面的定理表明, 定义在整个 Hilbert 空间上的算子, 要么是连续的, 要么是非常病态, 甚至不是可闭的; "自然" 的问题从来不会给出这样病态的算子.

定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的算子. 下述条件是等价的:

(i) u 处处有定义且连续;

(ii) u 处处有定义且是闭算子.

(这个定理当 E 和 F 是 Banach 空间的时候也成立, 称为闭图像定理.)

(i)⇒(ii): 这是 6.3.3 的推论.

(ii)⇒(i): 设 $D(u)=E$ 且 u 是闭算子. 设 B 是 $D(u^*)$ 中的单位球 $\|z\|\leqslant 1$. 对任意的 $x\in E$, 我们有

$$\sup_{y\in B}|(x|u^*y)|=\sup_{y\in B}|(ux|y)|\leqslant\|ux\|.$$

这样集合 $u^*(B)$ 就是有界的 (2.3.13). 从而 (根据 2.1.4) u^* 是连续的. 但是 u^* 是一个稠定 (6.3.6) 闭算子 (6.3.4), 于是根据 6.3.12, $u^*\in\mathcal{L}(F;E)$. 从而 $u^{**}\in\mathcal{L}(E;F)$, 这样 $u\subset u^{**}$ 就是连续的.

6.3.14 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定算子.

(i) $\operatorname{Ker}u^*=(\operatorname{Im}u)^{\perp}$;

(ii) $\overline{\operatorname{Im}u}=(\operatorname{Ker}u^*)^{\perp}$.

如果 u 还是一个闭算子, 那么

(iii) $\operatorname{Ker}u=(\operatorname{Im}u^*)^{\perp}$;

(iv) $\overline{\operatorname{Im}u^*}=(\operatorname{Ker}u)^{\perp}$.

(i) 和 (ii) 的证明和 2.5.17 是一样的.

设 u 是闭算子. 则在 (i) 和 (ii) 中把 u 换成 u^* 即可得到 (iii) 和 (iv), 因为 $u^{**}=u$.

6.3.15 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定闭算子. 容易知道 $\operatorname{Ker}u$ 是闭的. 我们称 $E_1=(\operatorname{Ker}u)^{\perp}$ 是 u 的**支撑子空间** (参见 2.5.8), 称 P_E 是 u 的**支撑** (参见 3.4.10). 设 F_1 是 u^* 的支撑子空间. 根据 6.3.14, 我们有 $F_1=\overline{\operatorname{Im}u}$. 设 v 是 u 在 $D(u)\cap E_1$ 上的限制, 我们把它看成是从 E_1 到 F_1 的一个算子. 于是:

(i) v 是单射 (因为 $\operatorname{Ker}v=(\operatorname{Ker}u)\cap E_1=0$);

(ii) v 的像集在 F_1 中稠密 ($\operatorname{Im}v=v(E_1)=u(E)=\operatorname{Im}u$);

(iii) $D(v)$ 在 E_1 中稠密 (因为根据 $\operatorname{Ker}u\subset D(u)$, 我们有 $D(u)=\operatorname{Ker}u+(D(u)\cap E_1)$, 所以 $D(u)\cap E_1$ 在 E_1 中稠密);

(iv) v 是闭算子 (因为满足 6.3.1 中的条件 (i)).

这样, 对 u 的研究就归结到研究一个定义域和像集都稠密的单值闭算子.

6.3.16 设 $(E_i)_{i\in I}$,$(F_i)_{i\in I}$ 是两族 Hilbert 空间, $E=\bigoplus_{i\in I}E_i$, $F=\bigoplus_{i\in I}F_i$. 对于任意的 $i\in I$, 设 u_i 是一个从 E_i 到 F_i 的算子. 设 $u=\bigoplus_{i\in I}u_i$, $u'=u|_{\sum_{i\in I}D(u_i)}$. 那么, **如果每一个 u_i 都是稠定闭算子, 那么 u 也是稠定闭算子, 且 $u=\overline{u'}$.** 事实上, 我们已经看到 (6.2.6), $D(u')$ 在 E 中是稠密的. 同理根据 6.2.6, $D(u'^*)$ 在 F 中是稠密的, 而且

$$\overline{u'}=(u'^*)^*=\bigoplus_{i\in I}(u_i^*)^*=\bigoplus_{i\in I}u_i=u.$$

例如, 如果对于任意的 $i \in I$ 都有 $u_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i)$, 那么 $\bigoplus_{i \in I} u_i$ 就是一个稠定的闭算子.

6.3.17 定理. 设 $(E_i)_{i \in I}$ 是一族 Hilbert 空间, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, u 是一个 E 中的闭算子, $u_i = u|_{E_i \cap D(u)}$. 下述条件是等价的:

(i) u 被每一个 E_i 化简;

(ii) u 是全体 u_i 的 Hilbert 和.

(ii)⇒(i): 这是显然的.

(i)⇒(ii): 假设 u 被每个 E_i 化简. 易见每个 u_i 都是闭的. 设 $v = \bigoplus_{i \in I} u_i$, $v' = v|_{\sum_{i \in I} D(u_i)}$. 显然我们有 $v' \subset u$; 因此根据 6.3.16, $v \subset u$. 设 $x \in D(u)$. 我们设 $x = (x_i)$, $ux = (y_i)$, 其中对于任意的 i, $x_i \in E_i$, $y_i \in E_i$. 根据 6.1.13, 我们有, 对于任意的 i, $x_i \in D(u_i)$. 另一方面, $y_i = P_{E_i} ux = uP_{E_i} x = ux_i = u_i x_i$, 所以 $\sum_{i \in I} \|u_i x - I\|^2 < +\infty$. 这样我们就得到了 $x \in D(v)$, 所以 $D(u) \subset D(v)$, 即得 $u = v$.

6.4 闭算子的谱

6.4.1 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的算子. u 的**特征向量**、**特征值**、**特征子空间**、**点谱**这些概念都可以和 2.7.1, 2.7.2 中一样定义.

假设 u 是闭算子. u 的任意特征子空间 F 显然也是闭的. 相应的特征值的**重数**仍然可以用 F 的 Hilbert 维数来定义.

6.4.2 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的算子. 考虑所有使得 $u - \lambda$ 是单射并且 $(u - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 构成的集合. 这个集合在 $\mathbb{C}$ 中的补集称为 u 的**谱**, 记作 $\operatorname{Sp} u$. 这样做推广了定义 2.8.1.

6.4.3 假设 $\operatorname{Sp} u \neq \mathbb{C}$. 设 $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$. 那么 (6.3.3) $(u - \lambda_0)^{-1}$ 是闭的, 所以 (6.3.5) $u - \lambda_0$ 是闭的, 于是 u 显然也是闭的. 所以, 当 u 不是闭算子的时候, 我们有 $\operatorname{Sp} u = \mathbb{C}$. 这样算子谱的概念只有对于闭算子才有意义.

即便当 u 是闭算子的时候, $\operatorname{Sp} u$ 也可以是空集或者 $\mathbb{C}$, 这和 $u \in \mathcal{L}(E)$ 的情形是不同的 (习题).

6.4.4 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的闭算子, $\lambda \in \mathbb{C}$. 为使得 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$, 必须且只需 $u - \lambda$ 是单射, 且像集为 E. 这个条件显然是必要的. 它同时也是充分的, 因为如果条件满足, 那么 $(u - \lambda)^{-1}$ 的定义域就是 E, 且是闭的 (6.3.5), 从而就是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个元素 (6.3.13).

这条注记即便是对于 $u \in \mathcal{L}(E)$ 也是有意义的. (我们在 2.8 中没有写出这一条来, 因为在那里我们还没有闭图像定理.)

6.4.5 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的稠定闭算子. 如果 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$, $(u-\lambda)^*$ 是单射, $((u-\lambda)^*)^{-1} = ((u-\lambda)^{-1})^* \in \mathcal{L}(E)$ (6.2.5). 然而 (6.2.3) $(u-\lambda)^* = u^* - \bar{\lambda}$. 所以 $\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(u^*)$. 因为 $u^{**} = u$, 我们可以交换 u 和 u^* 的地位, 从而得到

$$\operatorname{Sp}(u^*) = \overline{\operatorname{Sp} u}.$$

6.4.6 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的稠定闭算子. 设 $W(u)$ 是由全体形如 $(ux|x)$ 的复数构成的集合, 这里 $x \in D(u)$, $\|x\| = 1$.

(i) 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, d 是 λ 到 $W(u)$ 的距离, d' 是 λ 到 $W(u^*)$ 的距离, 如果 $d > 0$ 且 $d' > 0$, 我们有 $\lambda \notin \operatorname{Sp} u$, 且 $\|(u-\lambda)^{-1}\| \leqslant d^{-1}$;

(ii) $\operatorname{Sp} u$ 包含在 $W(u) \cup \overline{W(u^*)}$ 的闭包中.

(这个定理不是 2.8.15 的完美的推广, 因为当 $u \notin \mathcal{L}(E)$ 时, 一般来说 $W(u^*) \neq \overline{W(u)}$, 留作习题.)

(i) 对任意满足 $\|x\| = 1$ 的 $x \in D(u)$, 我们有

$$d \leqslant |(ux|x) - \lambda| = |((u-\lambda)x|x)|.$$

因此, 对于任意的 $y \in D(u)$, 我们有

$$d\|y\|^2 \leqslant |((u-\lambda)y|y)| \leqslant \|(u-\lambda)y\|\|y\|,$$

从而就得到

$$d\|y\| \leqslant \|(u-\lambda)y\|. \tag{4}$$

假设 $d > 0$. 则 (4) 证明了 $u-\lambda$ 是单射. 同时再假设 $d' > 0$, 那么 $u^* - \bar{\lambda}$ 也是单射, 所以 $\overline{\operatorname{Im}(u-\lambda)} = E$ (6.3.14). 根据 (4), $(u-\lambda)^{-1}$ 是一个从 $\operatorname{Im}(u-\lambda)$ 到 E 的连续线性算子. 因为 $u-\lambda$ 是闭的, 所以 $(u-\lambda)^{-1}$ 也是闭的 (6.3.5), 所以 $\operatorname{Im}(u-\lambda) = E$ (6.3.12), 且 $(u-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. 再由 (4) 可知 $\|(u-\lambda)^{-1}\| \leqslant d^{-1}$.

(ii) 这是 (i) 的直接推论.

6.4.7 对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$, 定义 $R(\lambda) = (u-\lambda)^{-1}$. 和 2.8.7 中一样, 对于 $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} u$,

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu).$$

这是因为, 对于 $x \in E$, $y = R(\lambda) \in D(u-\lambda) - D(u)$. 等式 $(\lambda-\mu)y = (u-\mu)y - (u-\lambda)y$ 可以写成 $(\lambda-\mu)R(\lambda)x = (u-\mu)R(\lambda)x - x$, 从而得到 $(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)x = R(\lambda)x - R(\mu)x$.

6.5 自共轭算子[①]

6.5.1 定义. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的算子. 我们称 u 是自共轭的, 如果 u^* 有定义, 且与 u 相等.

这样, 对于任意的 $x \in D(u)$, 都成立 $(ux|x) \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{L}(E)$ 中的一个元素是自共轭的, 必须且只需它是 Hermite 算子.

6.5.2 例. 根据 6.2.7, 我们在 6.1.15 中考虑的算子是自共轭的. 如果所有的 α_i 都是实数, 那么 6.2.8 中考虑的算子也是自共轭的.

6.5.3 自共轭算子都是闭算子 (6.3.4).

6.5.4 设 u 是一个自共轭算子. $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 则 $u + \lambda$ 和 μu 都是自共轭的 (6.2.3).

6.5.5 设 u 是一个自共轭算子, 且是单射, 那么 u^{-1} 是自共轭的. 事实上, 根据 6.3.14, $\operatorname{Im} u$ 是稠密的, 这样只要应用 6.2.5 就可以了.

6.5.6 设 u 和 v 是 E 中的两个自共轭算子. 如果 $u \subset v$, 那么我们有 $u = v$. 事实上, 根据 6.2.2, 我们有 $u^* \supset v^*$, 也就是说 $u \supset v$.

6.5.7 定理. 设 $(E_i)_{i \in I}$ 是一族 Hilbert 空间, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, 对于任意的 $i \in I$, 设 u_i 是一个 E_i 中的算子, $u = \bigoplus_{i \in I} u_i$. 为了使 u 是一个自共轭算子, 必须且只需每一个 u_i 都是自共轭的.

这是 6.2.6 的推论.

6.5.8 定义. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的算子, a 是一个实数. 我们称 $u \leqslant a$, 如果对于任意的 $x \in D(u)$, 都成立 $(ux|x) \leqslant a(x|x)$. 我们称 $u \geqslant a$, 如果对于任意的 $x \in D(u)$, 都成立 $(ux|x) \geqslant a(x|x)$.

特别地, 我们有自共轭算子 $\geqslant 0$ 的概念.

如果 $u \in \mathcal{L}(E)$, 那么我们就重新得到定义 3.3.1 的一个特殊情况.

6.5.9 设 u 是一个 E 中的自共轭算子. 如果存在实数 a, b, 使得 $a \leqslant u \leqslant b$, 我们就有 $u \in \mathcal{L}(E)$. 事实上, 根据 1.1.6, 存在常数 M, 使得

$$x \in D(u), y \in D(u), \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1 \Rightarrow |(ux|y)| \leqslant M.$$

这样, 由连续性,

$$\begin{aligned} x \in D(u), \|x\| \leqslant 1 &\Rightarrow \text{对于任意满足 } \|y\| \leqslant 1 \text{ 的 } y \in E, \text{都成立} |(ux|y)| \leqslant M \\ &\Rightarrow \|ux\| \leqslant M. \end{aligned}$$

[①] 译者注: 在中文文献中也称为自伴算子.

因此 u 是连续的. 因为 u 是稠定闭算子, 所以我们得到 $u \in \mathcal{L}(E)$ (6.3.12).

6.5.10　定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, u 是一个 E 中的算子, $a \in \mathbb{R}$.

(i) 我们有 $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}$;

(ii) 如果 $u \leqslant a$, 我们有 $\operatorname{Sp} u \subset (-\infty, a]$;

(iii) 如果 $u \geqslant a$, 我们有 $\operatorname{Sp} u \subset [a, +\infty)$.

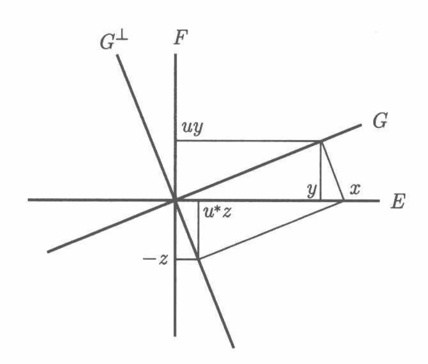
只要我们观察到, 按照 6.4.6 中的记号, $W(u^*) = W(u) \subset \mathbb{R}$, 定理的结论就可以由 6.4.6(ii) 得到.

6.5.11　引理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定闭算子.

(i) $1 + u^*u$ 是从 $D(u^*u)$ 到 E 的双射;

(ii) 设 $v = (1+u^*u)^{-1}$, $w = u(1+u^*u)^{-1}$, 那么 v 和 w 分别是 $\mathcal{L}(E)$ 和 $\mathcal{L}(E;F)$ 的元素, 且 $\|v\| \leqslant 1$, $\|w\| \leqslant 1$; 而且 v 还是一个正 Hermite 算子;

(iii) 设 $u' = u|_{D(u^*u)}$, 我们有 $\overline{u'} = u$.



设 G 是 u 的图像, 它是 $E \oplus F$ 的一个线性闭子空间. 根据 6.2.4, $G^{\perp}$ 是所有形如 (u^*z, z) 的元素构成的集合, 其中 $z \in D(u^*)$.

对于任意的 $x \in E$, 存在唯一的一种分解, 把 $E \oplus F$ 中的元素 $(x, 0)$ 写成 G 的一个元素与 $G^{\perp}$ 的一个元素之和:

$$(x, 0) = (u, uy) + (u^*z, -z), \tag{5}$$

其中 $y \in D(u)$, $z \in D(u^*)$. 记 $y = vx$, $z = wx$. 这样我们就定义了从 E 到 E 的映射 v, 以及从 E 到 F 的映射 w, 很容易验证这是两个连续线性算子. 于是等式 (5) 就等价于下述两个等式

$$x = vx + u^*wx, \tag{6}$$

$$0 = uvx - wx. \tag{7}$$

根据 (7) 我们知道 $w = uv$, 这样 (6) 就给出 $vx + u^*uvx = x$; 所以

$$(1 + u^*u)v = 1, \tag{8}$$

$$w = uv. \tag{9}$$

关系式 (5) 推出 $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|uy\|^2 + \|u^*z\|^2 + \|z\|^2$, 从而 $\|y\| \leqslant \|x\|$, $\|z\| \leqslant \|x\|$. 所以 $\|v\| \leqslant 1$, 且 $\|w\| \leqslant 1$. 根据 (8), 从 $D(u^*u)$ 到 E 的映射 $1 + u^*u$ 是满射. 它同时也是单射, 因为对于 $t \in D(u^*u)$, 我们有 $((1 + u^*u)t|t) = (t|t) + (ut|ut)$, 因此

$$((1 + u^*u)t|t) \geqslant (t|t), \tag{10}$$

如果 $(1 + u^*u)t = 0$, 那么必然有 $t = 0$. 这样我们就证明了 (i).

我们现在来考察 $(1 + u^*u)^{-1}$, 这是一个从 E 到 $D(u^*u)$ 的双射. 在等式 (8) 两边都左乘 $(1 + u^*u)^{-1}$, 我们得到 $v = (1 + u^*u)^{-1}$. 根据 (9), $w = u(1 + u^*u)^{-1}$.

这样, 关系式 (10) 就可以写成, 对于任意的 $x \in E$, $(x|vx) \geqslant (vx|vx)$. 由此推出 $v \geqslant 0$ 是一个 Hermite 算子. 这样我们就证明了 (ii).

设 $G' \subset G$ 是 u' 的图像. 设 H 是 G' 在 G 中的正交补. 为了证明 (iii), 我们只要证明 $H = 0$. 设 $(t, ut) \in G$, 其中 $t \in D(u)$, 并假设 $(t, ut) \in H$. 对于任意的 $x \in E$, 我们写出 (5) 中的分解. 我们有 $y = vx \in v(E) = D(u^*u)$, 所以 $(y, uy) \in G'$. 这样 (t, ut) 和 (y, uy) 就是正交的; 而另一方面, $(u^*z, -z) \in G^\perp$, 所以 (t, ut) 和 $(u^*z, -z)$ 正交. 这样

$$0 = ((t, ut)|(y, uy) + (u^*z, -z)) = ((t, ut)|(x, 0)) = (t|x),$$

因为这里 x 是 E 中任意元素, 所以 $t = 0$, 这样 $(t, ut) = 0$.

6.5.12 定理. *设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定闭算子. 那么 $u^*u \geqslant 0$ 是一个自共轭算子.*

利用 6.5.11 的记号, v 是自共轭算子, 从而 $1 + u^*u$ 是自共轭的 (6.5.5), 因此 u^*u 是自共轭的 (6.5.4). 如果 $x \in D(u^*u)$, 我们有 $x \in D(u)$, 从而

$$(u^*ux|x) = (ux|ux) \geqslant 0,$$

即得 $u^*u \geqslant 0$.

VII 自共轭线性算子的谱分解

在第 V 章中, 对于每个连续 Hermite 算子, 我们都关联了一个恒等映射的分解. 我们现在来描述上述过程的逆. 事实上, 我们给出的构造不仅能够得到所有的连续 Hermite 算子, 还能够得到所有的 (无界) 自共轭线性算子. 这就是为什么我们把这部分内容放到第 VI 章之后再讲述的原因. (另一个理由是我们将要用到的工具不像在第 V 章里面那么初等.)

7.1 一个有界函数关于一个恒等映射分解的积分

7.1.1 设 $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 的一个分解, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是相应的 E 中恒等映射的分解. 对于任意的 $x\in E$, $\mathbb{R}$ 上的函数 $\lambda\mapsto(p_\lambda x|x)$ 是递增的, 其取值从 0 增长到 $\|x\|^2$, 这样就定义了 $\mathbb{R}$ 上的一个正测度 ν_x, 满足: 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 都有

$$\nu_x((-\infty,\lambda])=(p_\lambda x|x).$$

ν_x 的总质量 $\|\nu_x\|$ 是 $\|x\|^2$. 若 $\lambda\leqslant\mu$, 我们有

$$\begin{aligned}
\nu_x([\lambda,\mu])&=(p_\mu x|x)-(p_{\lambda-}x|x),\\
\nu_x([\lambda,\mu))&=(p_{\mu-}x|x)-(p_{\lambda-}x|x),\\
\nu_x((\lambda,\mu])&=(p_\mu x|x)-(p_\lambda x|x),\\
\nu_x((\lambda,\mu))&=(p_{\mu-}x|x)-(p_\lambda x|x)\ (\text{对于 }\lambda<\mu).
\end{aligned}$$

若 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是和一个连续 Hermite 算子关联的 E 中恒等映射的分解, ν_x 是由 x 和 ν 定义的谱测度 (参见 5.4.6).

7.1.2 更一般地, 设 $x, y \in E$. 根据 1.1.6, 函数 $\lambda \mapsto (p_\lambda x|y)$ 是形如 $\lambda \mapsto (p_\lambda x|x)$ 的函数的线性组合. 因此, 存在 $\mathbb{R}$ 上唯一的有界测度 $\nu_{x,y}$ 使得

$$\nu_{x,y}((-\infty, \lambda]) = (p_\lambda x|y).$$

我们有 $\nu_{x,x} = \nu_x$. 记

$$\mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda) = \mathrm{d}(p_\lambda x|y).$$

我们称 $\nu_{x,y}$ 为**由** x, y **和** (p_λ) **定义的测度**. 如果在等式 $\nu_{x,y}((-\infty, \lambda]) = (p_\lambda x|y)$ 中令 λ 趋向于 $+\infty$, 我们得到

$$(x|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(p_\lambda x|y). \tag{1}$$

7.1.3 **例.** 取 3.5.10 中的记号. 若 $x \in \ell^2(I)$, 我们有

$$P_{F_\lambda} x = \sum_{\alpha_i \leqslant \lambda} (x|e_i) e_i.$$

因此, 若 $x, y \in E$, 且 $\nu_{x,y}$ 是由 x, y 和 (p_λ) 定义的测度, 我们有

$$\nu_{x,y}((-\infty, \lambda]) = (P_{F_\lambda} x | P_{F_\lambda} y) = \sum_{\alpha_i \leqslant \lambda} (x|e_i)\overline{(y|e_i)}.$$

因此, (当 α_i 两两不同时) $\nu_{x,y}$ 是由 α_i 处的质量 $(x|e_i)\overline{(y|e_i)}$ 定义的测度.

这样, (1) 就是 Parseval 等式

$$(x|y) = \sum_i (x|e_i)\overline{(y|e_i)}$$

的推广

7.1.4 **例.** 取 3.5.11 中的记号, 并设 Δ 的两个端点分别为 l' 和 l (可能是无限的). 设 $f, g \in L^2(\Delta)$ 且 $\nu_{f,g}$ 是由 f, g 和 (F_λ) 定义的测度. 我们有

$$\begin{aligned}
&\nu_{f,g}((-\infty, \lambda]) = 0 \quad (\text{当 } \lambda \leqslant l' \text{ 时}),\\
&\nu_{f,g}((-\infty, \lambda]) = (f|g) \quad (\text{当 } \lambda \geqslant l \text{ 时}),\\
&\nu_{f,g}((-\infty, \lambda]) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\text{当 } \lambda \in \Delta \text{ 时}).
\end{aligned}$$

因此 $\nu_{f,g}$ 的支撑在 $\overline{\Delta}$ 中, 且 $\nu_{f,g}$ 在 $\overline{\Delta}$ 上的限制是相对于 Lebesgue 测度具有密度函数 $f\bar{g}$ 的测度.

7.1.5 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个分解. 对于 $x, y \in E$, 以 $\nu_{x,y}$ 表示由 x, y 和 (p_λ) 定义的测度.

(i) 对于 $x, y \in E$, $\rho \in \mathbb{C}$, 我们有 $\nu_{\rho x, y} = \rho\nu_{x, y}$;

(ii) 对于 $x, x', y \in E$, 我们有 $\nu_{x+x', y} = \nu_{x, y} + \nu_{x', y}$;

(iii) 对于 $x, y \in E$, 我们有 $\nu_{y, x} = \overline{\nu_{x, y}}$;

(iv) 对于 $x, y \in E$, 我们有 $\|\nu_{x, y}\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

若 $x, x', y \in E$, 则有

$$(p_\lambda(x + x')|y) = (p_\lambda(x)|y) + (p_\lambda(x')|y),$$

即得 $\nu_{x+x', y} = \nu_{x, y} + \nu_{x', y}$. 用类似方法可以证明 (i).

另一方面,

$$(p_\lambda y|x) = (y|p_\lambda x) = \overline{(p_\lambda x|y)},$$

即得 $\nu_{y,x} = \overline{\nu_{x,y}}$.

最后, $\|\nu_{x,y}\|$ 是

$$|\nu_{x,y}((-\infty, \lambda_1])| + |\nu_{x,y}((\lambda_1, \lambda_2])| + \cdots + |\nu_{x,y}((\lambda_{n-1}, \lambda_n])| + |\nu_{x,y}((\lambda_n, +\infty))| \quad (2)$$

对于所有递增实数组 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的上确界. 取定一个这样的数组. 记

$$G_1 = p_{\lambda_1}(E), G_2 = (p_{\lambda_2} - p_{\lambda_1})(E), \cdots, G_n = (p_{\lambda_n} - p_{\lambda_{n-1}})(E), G_{n+1} = (1 - p_{\lambda_n})(E).$$

我们有

$$\begin{aligned}\nu_{x,y}((-\infty, \lambda_1]) = (P_{G_1}x|y), \quad \nu_{x,y}((\lambda_1, \lambda_2]) = (P_{G_2}x|y), \quad \cdots,\\ \nu_{x,y}((\lambda_{n-1}, \lambda_n]) = (P_{G_n}x|y), \quad \nu_{x,y}((\lambda_n, +\infty)) = (P_{G_{n+1}}x|y).\end{aligned}$$

因此和式 (2) 由

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} |(P_{G_i}x|P_{G_i}y)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \|P_{G_i}x\|\|P_{G_i}y\| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} \|P_{G_i}x\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \|P_{G_i}y\|^2\right)^{1/2} = \|x\|\|y\|,\end{aligned}$$

即得 (iv).

7.1.6 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个分解, f 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 复值函数.

(i) 对于任意的 $x, y \in E$, f 对于测度 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 是可积的;

(ii) 存在唯一的 $v \in \mathcal{L}(E)$ 使得对于任意的 $x, y \in E$,

$$(vx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y);$$

(iii) 我们有 $\|v\| \leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)|$.

(i) f 是 Borel 函数, 因此对于 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 是可测的. 它同时是有界的, 测度 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 也是有界的, 即得 (i).

(ii) 和 (iii) 根据 7.1.5(i), (ii), (iii), $E \times E$ 上的函数

$$(x, y) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)$$

是一个半双线性型. 它是连续的, 因为若记 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y) = \mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)\right| &\leqslant \left(\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)|\right) \|\nu_{x,y}(\lambda)\| \quad (\text{根据积分理论}) \\ &\leqslant \left(\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)|\right) \|x\|\|y\| \quad (\text{根据 } 7.1.5(\text{iv})).\end{aligned}$$

最后根据 2.4.3 可以得到 v 的存在性和唯一性, 以及不等式 (iii).

7.1.7 利用 7.1.6 中的记号, 我们定义

$$\boxed{v = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda.}$$

7.1.8 引理. 设 $E, (p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, f, v 如 7.1.6 中所述. 对于任意的 $x, y \in E$, 定义

$$\mathrm{d}(p_\lambda x|y) = \mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda).$$

设 ν 是相对于 $\nu_{x,y}$ 具有密度 f 的测度. 我们有 $\nu = \nu_{vx,y}$.

设 $\rho \in \mathbb{R}$. 我们有

$$\nu_{x,p_\rho y}((-\infty, \lambda]) = (p_\lambda x|p_\rho y) = (p_\rho p_\lambda x|y).$$

当 $\lambda \leqslant \rho$ 时它等于 $(p_\lambda x|y)$, 当 $\lambda > \rho$ 时它等于 $(p_\rho x|y)$. 如果我们以 χ_ρ 记 $\mathbb{R}$ 中区间 $(-\infty, \rho]$ 的特征函数, 我们看到 $\nu_{x,p_\rho y}$ 是相对于 $\nu_{x,y}$ 具有密度函数 χ_ρ 的测度. 于是我们有

$$\begin{aligned}\nu_{vx,y}((-\infty, \rho]) &= (p_\rho vx|y) = (vx|p_\rho y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}\nu_{x,p_\rho y}(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\chi_\rho\lambda\ \mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\rho\lambda\ \mathrm{d}\nu(\lambda) \\ &= \nu((-\infty, \rho]).\end{aligned}$$

7.1.9 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个分解.

(i) 若 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 复值函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(\lambda)+g(\lambda))\ \mathrm{d}p_\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda+\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda\right), \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\lambda)}\ \mathrm{d}p_\lambda=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda\right)^*; \tag{5}$$

(ii) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 复 (相应地, 实) 值函数, 且

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda,$$

则 u 是正常 (相应地, Hermite) 元. 设 $f\in\mathcal{L}(E)$ 和所有的 p_λ 都可交换, 则 t 和 u 可交换.

设 u, v, w, r, s 分别是 $\mathcal{L}(E)$ 中对应于 $f, g, f+g, fg, \bar{f}$ 的元素. 对于任意的 x, $y\in E$, 我们有

$$\begin{aligned}(wx|y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(f+g)(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)+\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)\\&=(ux|y)+(vx|y)=((u+v)x|y),\end{aligned}$$

因此 $w=u+v$, 这就证明了 (3).

$$\begin{aligned}(rx|y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(fg)(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda vx|y)\quad(\text{根据 7.1.8})\\&=(u(v)x|y),\end{aligned}$$

因此 $r=uv$, 这就证明了 (4).

$$\begin{aligned}(sx|y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\lambda)}\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y)\\&=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda y|x)}\quad(\text{根据 7.1.5(iii)})\\&=\overline{(uy|x)}=(x|uy)=(u^*x|y),\end{aligned}$$

因此 $s=u^*$, 这就证明了 (5).

我们有 $f\bar{f} = \bar{f}f$, 因此根据 (4) 和 (5), 得到 $uu^* = u^*u$, 从而 u 是正常算子. 若 f 是实值的, 根据 (5), u 是 Hermite 算子.

设 t 是 $\mathcal{L}(E)$ 中和 p_λ 可交换的一个元素. 对于任意的 $x, y \in E$, 我们有

$$(p_\lambda tx|y) = (tp_\lambda x|y) = (p_\lambda x|t^*y),$$

从而

$$(utx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda tx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|t^*y) = (ux|t^*y) = (tux|y),$$

因此 $ut = tu$.

7.1.10 设 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 在 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集 S 外取常值. 这样, 测度 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 的支撑集都包含在 S 中, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda$$

只依赖于 $f|_S$. 这样, 若 g 是一个定义域包含 S 的复值函数, 且 $g|_S$ 是有界 Borel 函数, 我们把 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda$ 或 $\int_S g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda$ 定义成 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda$, 其中 f 是任何一个满足 $f|_S = g|_S$ 的有界 Borel 函数. 对于任意的 $x, y \in E$, 我们有

$$\left(\left(\int_S g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda\right) x \middle| y\right) = \int_S g(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|y),$$

$$\left\|\int_S g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda\right\| \leqslant \sup_{\lambda\in S} |g(\lambda)|.$$

定理 7.1.9 显然可以推广到这种情形.

7.1.11 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是和 h 相关联的恒等映射的分解, g 是 $\mathrm{Sp}\,h$ 上复值函数, 且可作为一列有界连续函数的简单极限. 对于任意的 $x \in E$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\left(\int_{\mathrm{Sp}\,h} g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda\right) x \middle| x\right) &= \int_{\mathrm{Sp}\,h} g(\lambda)\ \mathrm{d}(p_\lambda x|x) \quad (\text{根据 } 7.1.10)\\ &= (g(h)x|x) \quad (\text{根据 } 5.3.5(\mathrm{viii})),\end{aligned}$$

因此,

$$\int_{\mathrm{Sp}\,h} g(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda = g(h),$$

并且, 特别地,

$$\int_{\mathrm{Sp}\,h} \lambda\ \mathrm{d}p_\lambda = h.$$

所以 5.4.7 中引进的记号就是本章中相应记号的特例. (本章给出了一种比 5.3 所讨论的内容更为广泛的 “Borel” 函数演算. 其实我们在第 V 章里就可以引进这种函数演算了.)

7.1.12 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $\mathscr{H}$ 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的 Hermite 元全体, $\mathscr{R}$ 是 E 中的恒等映射在一个有界闭线段外为常值的分解全体. 对于 $h \in \mathscr{H}$, 设 $\Phi(h)$ 是和 h 相关联的恒等映射的分解. 对于 $(p_\lambda) \in \mathscr{R}$, 设

$$\Psi((p_\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}p_\lambda.$$

则 $\Phi : \mathscr{H} \to \mathscr{R}$ 和 $\Psi : \mathscr{R} \to \mathscr{H}$ 是互逆双射.

根据 7.1.11, 对于任意的 $h \in \mathscr{H}$, 我们有 $\Psi(\Phi(h)) = h$. 因此 Ψ 是满射. 只要证明 Ψ 也是单射就可以说明 Ψ 是双射且 $\Phi = \Psi^{-1}$, 我们现在就来做这件事情.

设 (p_λ), (q_λ) 是 E 上恒等映射的两个右连续分解, 且在某个紧区间 (我们假设这两个分解对应的区间是同一个, 设为 $[a, b]$) 外是常值. 我们假设

$$\int_a^b \lambda \, \mathrm{d}p_\lambda = \int_a^b \lambda \, \mathrm{d}q_\lambda = h.$$

根据 7.1.9, 对于任意的整数 $n \geqslant 0$, 我们有

$$\int_a^b \lambda^n \, \mathrm{d}p_\lambda = h^n = \int_a^b \lambda^n \, \mathrm{d}q_\lambda.$$

对于 $x, y \in E$, 定义 $\mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda) = \mathrm{d}(p_\lambda x|y)$, $\mathrm{d}\nu'_{x,y}(\lambda) = \mathrm{d}(q_\lambda x|y)$. 测度 $\nu_{x,y}$, $\nu'_{x,y}$ 的支撑集都包含在 $[a, b]$ 中. 根据上文, 我们知道对于任意的 $f \in \mathbb{C}[X]$ 都成立

$$\int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda) = \int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}\nu'_{x,y}(\lambda).$$

从而由 Weierstrass 定理知 $\nu_{x,y} = \nu'_{x,y}$. 现在设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 我们有

$$(p_\lambda x|y) = \nu_{x,y}((-\infty, \lambda]) = \nu'_{x,y}((-\infty, \lambda]) = (q_\lambda x|y).$$

由 x 和 y 的任意性, 我们得到 $p_\lambda = q_\lambda$.

7.1.13 引理. 设 $(E_i)_{i \in I}$ 是一族 Hilbert 空间,

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i.$$

对于任意的 $i \in I$, 设 $(p^i_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 是 E_i 上恒等映射的一个分解; 设 $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 是 $(p^i_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 的 Hilbert 和, 即 E 上恒等映射的一个分解. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 复值函数, 并定义

$$u_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \mathrm{d}p^i_\lambda, \quad u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \mathrm{d}p_\lambda,$$

则

$$u = \bigoplus_{i \in I} u_i.$$

对于任意的 i, 我们有

$$\|u_i\| \leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)|,$$

因此 $v = \bigoplus_{i\in I} u_i$ 是有定义的. 只需证明, 对于任意的 i, $u|_{E_i} = v|_{E_i}$, 即 $u|_{E_i} = u_i$. 然而, 若 $x, y \in E_i$, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们都有

$$(p_\lambda x|y) = (p^i_\lambda x|y),$$

即可得到

$$(ux|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}(p_\lambda x|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}(p^i_\lambda x|y) = (u_i x|y).$$

7.2 一个无界函数关于一个恒等映射分解的积分

7.2.1 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个右连续分解, f 是 $\mathbb{R}$ 上一个 Borel 复值函数. 对于任意 $n \geqslant 0$, 设 e_n 是 $\mathbb{R}$ 上的下述函数: 当 $|f(n)| \leqslant n$ 时, $e_n = 1$; 当 $|f(n)| > n$ 时, $e_n = 0$. 这是一个有界 Borel 函数. 定义 $q_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e_n(\lambda)\mathrm{d}p_\lambda$. 对于 $m \leqslant n$, 我们有 $e_m e_n = e_m$, 从而根据 7.1.9, 我们知道 q_n 都是投影算子, 而且 $q_0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots$.

对于任意的 $x \in E$, 我们根据 Lebesgue 定理, 有

$$\|(1-q_n)x\|^2 = ((1-q_n)x|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1-e_n(\lambda))\,\mathrm{d}(p_\lambda x|x) \to 0,$$

因此当 $n \to +\infty$ 时, q_n 强收敛到 1.

设 $f_n = fe_n$, 这是一个有界 Borel 函数. 定义 $v_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\lambda)\mathrm{d}p_\lambda$.

定义. *设 D 是使得 $v_n x$ 在 $n \to +\infty$ 时有极限的全体 $x \in E$ 构成的集合. 我们定义*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}p_\lambda$$

为 E 中以 D 为定义域的算子, 它在 $x \in D$ 的取值为 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n x$.

和 7.1.10 中一样, 我们可以把定义推广到 (p_λ) 在 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集外取常值的情形.

当 f 是有界函数时, 我们重又得到 7.1.7 中定义的 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}p_\lambda$.

7.2.2 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个右连续分解, f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有界复值 Borel 函数, $v = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}p_\lambda$.

(i) $D(v)$ 是由所有满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x) < +\infty$ 的 $x \in E$ 构成的集合;

(ii) 如果 $x \in D(v)$, 且 $y \in E$, 那么 f 关于测度 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 是可测的, 且

$$(vx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \,\mathrm{d}(p_\lambda x|y);$$

(iii) 如果 $x \in D(v)$, 那么我们有 $\|vx\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x)$;

(iv) $D(v)$ 在 E 中稠密, 且 $v^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)} \,\mathrm{d}p_\lambda$;

(v) v 是闭算子;

(vi) 如果 f 是实值的, 那么 v 是自共轭的.

我们利用 7.2.1 中的记号. 如果 $x \in D(v)$, 我们有

$$\begin{aligned}\|vx\|^2 &= \lim \|v_n x\|^2 = \lim(v_n^* v_n x|x) \\ &= \lim \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x) \ (\text{根据 } 7.1.9) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x),\end{aligned}$$

最后一个等式是根据单调极限定理①. 这就证明了 (iii), 同时也证明了, 对于 $x \in D(v)$, 我们有 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x) < +\infty$. 反之, 如果 $x \in E$ 使得这个积分是有限的, 那么 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x)$ 就有一个有限的极限, 这样对于 $n \geqslant m$,

$$\begin{aligned}\|(v_n - v_m)x\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)(e_n - e_m)(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (|f_n(\lambda)|^2 - |f_m(\lambda)|^2) \,\mathrm{d}(p_\lambda x|x) \to 0,\end{aligned}$$

从而 $x \in D(v)$. 这就证明了 (i).

对于 $x, y \in E$, 定义 $\mathrm{d}\nu_{x,y}(\lambda) = \mathrm{d}(p_\lambda x|y)$. 如果 $x \in D(v)$, 且 $y \in E$, 那么我们有 $f_n \nu_{x,y} = \nu_{v_n x, y}$ (7.1.8), 因此根据 7.1.5(iv), $\|f_n \nu_{x,y}\| \leqslant \|v_n x\|\|y\| \leqslant \|vx\|\|y\|$. 由此可知, 对于任意的 n,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(\lambda)| \,\mathrm{d}|\nu_{x,y}|(\lambda) \leqslant \|vx\|\|y\|.$$

①译者注: 中文文献中一般称为 Levi 引理, 法国的文献里面有时会特别注明是意大利数学家 Bippo Levi.

由此我们知道 $|f|$ 是 $|\nu_{x,y}|$ 可积的, 从而 f 是 $\nu_{x,y}$ 可积的. 所以根据 Lebesgue 定理, 可以对等式 $(v_n x|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 两边取极限, 最终得到

$$(vx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda x|y).$$

这样就证明了 (ii).

对于 $m \geqslant n$, 我们有 $f_m e_n = f_n e_n$, 因此 $v_m q_n = v_n q_n$. 我们由此得到, 如果 $x \in q_n(E)$, 那么对于 $m \geqslant n$, 就有 $v_m x = v_n x$, 因此 $x \in D(v)$ 且 $vx = v_n x$. 这样, 由于对于任意的 n, $D(v)$ 都包含 $q_n(E)$, 根据 7.2.1, 我们得到 $D(v)$ 在 E 中稠密.

现在我们定义 $v' = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)}\,\mathrm{d}p_\lambda$. 对于 $x \in D(v)$, $y \in D(v')$, 我们有

$$(v'y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)}\,\mathrm{d}(p_\lambda y|x) = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}(p_\lambda y|x)} = \overline{(vx|y)} = (y|vx),$$

因此 $v' \subset v^*$. 现在设 $z \in D(v^*)$. 这样对于任意的 $x \in E$ 和任意整数 n, 我们有

$$(x|v_n^* z) = (v_n x|z) = (v_n e_n x|z) = (v e_n x|z) = (e_n x|v^* z) = (x|e_n v^* z),$$

所以当 $n \to +\infty$ 时, $v_n^* z = e_n v^* z$ 收敛到 $v^* z$. 而根据 7.1.9, 我们知道

$$v_n^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_n(\lambda)}\,\mathrm{d}p_\lambda,$$

从而根据 v' 的定义可知 $z \in D(v')$. 这样, $D(v^*) \subset D(v')$, 最终得到 $v^* \subset v'$. 这就证明了 (iv).

在 (iv) 中交换 f 和 $\overline{f}$ 的位置, 我们得到 $v^{**} = v$, 以及 v 是闭算子. 如果 f 是实值的, 根据 (iv) 可知 $v = v^*$, 这就得到了 (vi).

7.2.3 特别地, 如果 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个右连续分解, 我们可以考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{d}p_\lambda$, 这是 E 中的一个自共轭算子. 我们将在 7.3.1 中看到, 所有的自共轭算子都可以写成这种形式 (这是本教程中最根本的定理). 所以深入研究形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}p_\lambda$$

的算子是有意义的. (下面我们将证明的定理在定理 7.3.1 的证明中是有用的.)

7.2.4 定理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个右连续分解, f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有界复值 Borel 函数, $u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}p_\lambda$, $t \in \mathcal{L}(E)$. 如*

果 t 和所有的 p_λ 均可交换, 那么 t 和 u 可交换.

首先假设 f 是有界的. 对于任意的 $x, y \in E$, 和任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有 $(p_\lambda tx|y) = (tp_\lambda x|y) = (p_\lambda x|t^*y)$, 从而可知

$$(utx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda tx|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda x|t^*y) = (ux|t^*y) = (tux|y),$$

这样就得到了 $ut = tu$. 现在来处理一般情形, 我们利用 7.2.1 中的记号. 由上可知 $tv_n = v_n t$, 从而根据 6.1.11(iii) 和 u 的定义可知 t 和 u 可交换.

7.2.5 定理. 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一族 Hilbert 空间,

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i.$$

对于任意的 $i \in I$, 设 $(p^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E_i 上恒等映射的一个右连续分解; 设 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 $(p^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的 Hilbert 和, 即 E 上恒等映射的一个分解. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上一个 Borel 复值函数, 并定义

$$u_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}p^i_\lambda, \quad u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\ \mathrm{d}p_\lambda,$$

则

$$u = \bigoplus_{i\in I} u_i.$$ [①]

定义 $v = \bigoplus\limits_{i\in I} u_i$, $v' = v|_{\sum\limits_{i\in I} D(u_i)}$. 设 $x \in E_i$, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们都有 $p_\lambda x = p^i_\lambda x$, 从而对于任意的 $y \in E$,

$$\mathrm{d}(p_\lambda x|y) = \mathrm{d}(p^i_\lambda x|y).$$

根据 7.2.2(i), (ii), 我们得到 $u_i \subset u$, 即可知 $v' \subset u$ 以及 $v \subset u$ (6.3.16 和 7.2.2(v)). 设 $x = (x_i) \in D(u)$. 对于 I 的任意有限子集 J, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\ \mathrm{d}(p^i_\lambda x|x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\ \mathrm{d}\left(\left(\sum_{i\in J} p^i_\lambda\right) x|x\right)\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\ \mathrm{d}(p_\lambda x|x) = \|ux\|^2,\end{aligned}$$

所以对于任意的 $i \in I$, 都有 $x_i \in D(u_i)$, 以及 $\sum\limits_{i\in I}\|u_i x\|^2 \leqslant \|ux\|^2$. 于是 $x \in D(v)$, 这样就证明了 $u = v$.

---

①译者注: 这即是引理 7.1.13 对于无界函数的版本.

7.2.6 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E 中恒等映射的一个右连续分解, $F_\lambda = p_\lambda(E)$, $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$.

(i) 每个 F_λ 都化简 h;

(ii) 如果我们把 h 写成 F_λ 上的算子 h'_λ 以及 $F_\lambda^\perp$ 上的算子 h''_λ 的 Hilbert 和, 我们有 $h'_\lambda \leqslant \lambda$, 以及 $h''_\lambda \geqslant \lambda$;

(iii) 设 $\lambda \leqslant \mu$, 如果我们把 h 写成 $F_\mu \ominus F_\lambda$ 上的算子 $h'_{\mu\lambda}$ 和 $(F_\mu \ominus F_\lambda)^\perp$ 上的算子 $h''_{\mu\lambda}$ 的 Hilbert 和, 那么我们有 $\lambda \leqslant h'_{\mu\lambda} \leqslant \mu$; 特别地, $h'_{\mu\lambda} \in \mathcal{L}(F_\mu \ominus F_\lambda)$;

(iv) 设 $(\cdots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 是一列单调递增的实数, 满足当 $n \to \pm\infty$ 时 $\lambda_n \to \pm\infty$. 设 $G_n = F_{\lambda_n} \ominus F_{\lambda_{n-1}}$, 则 E 是 G_n 的 Hilbert 和, 且 u 可以写成一系列满足 $\lambda_{n-1} \leqslant w_n \leqslant \lambda_n$ 的 $w_n \in \mathcal{L}(G_n)$ 的 Hilbert 和.

(i) 这是 7.2.4 的推论.

(ii) 将 7.2.5 应用于由 $(F_\lambda, F_\lambda^\perp)$ 化简的 $(E_i)_{i\in I}$. 把每个 p_μ 写成 F_λ 上的投影 p_μ^1 与 $F_\lambda^\perp$ 上的投影 p_μ^2 的 Hilbert 和. 那么对于 $\mu \geqslant \lambda$, p_μ^1 是常值, 而对于 $\mu \leqslant \lambda$, p_μ^2 是常值. 设 $h'_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda^1$, $h''_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda^2$. 根据 7.2.5, $h = h'_\lambda \oplus h''_\lambda$. 另一方面, 对于任意的 $x \in F_\lambda$, 我们有

$$(h'_\lambda x|x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu \mathrm{d}(p_\mu^1 x|x) \leqslant \lambda \int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}(p_\mu^1 x|x) = \lambda(x|x),$$

从而 $h'_\lambda \leqslant \lambda$. 同理可证 $h''_\lambda \geqslant \lambda$.

(iii) 证明和 (ii) 类似.

(iv) G_n 是两两正交的, 且由于 $p_{+\infty} = 1, p_{-\infty} = 0$, 可知 $\sum_n G_n$ 在 E 中稠密. 所以 $E = \bigoplus_n G_n$. 利用 (i) 和 (iii), 最后一个结论由 6.3.17 可得.

7.3 自共轭算子的谱分解

7.3.1 定理 (von Neumann). 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 上的自共轭线性算子.

(i) 存在唯一一个 E 中恒等映射的右连续分解 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, 使得 $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$;

(ii) 设 $t \in \mathcal{L}(E)$, 为使得 t 和 h 可交换, 必须且只需 t 和每一个 p_λ 可交换.

a) 根据 6.5.11(i), $1 + h^2$ 是从 $D(h^2)$ 到 E 的一个双射. 令 $v = (1 + h^2)^{-1}$, 则

$$(1 + h^2)v = 1, \ \ v(1 + h^2) \subset 1.$$

同时定义 $w = h(1 + h^2)^{-1}$. 根据 6.5.11(ii), 我们有 $v \in \mathcal{L}(E)$, $w \in \mathcal{L}(E)$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. 我们来证明 v 和 w 是可交换的. 我们有 $h(1 + h^2) = (1 + h^2)h$ (两边的定义域都是

$D(h^3))$, 所以

$$vh = vh(1+h^2)v = v(1+h^2)hv \subset hv,$$

从而有

$$vw = vhv \subset hvv = wv;$$

因为 $D(vw) = E$, 我们就得到了 $vw = wv$.

b) 设 (q_λ) 是与 v 关联的恒等映射的分解. 我们知道, 对于 $\lambda \geqslant 1$, $q_\lambda = 1$; $\lambda \leqslant 0$, $q_\lambda = 0$. 因为 v 是单射, 我们有 $q_0 = q_{0-}$ (5.4.10(i)), 因此 $q_0 = 0$. 这样我们可以定义 $r_1 = q_1 = q_{1/2}$, $r_2 = q_{1/2} - q_{1/3}, \cdots$, E 就是全体 $R_n = r_n(E)$ 的 Hilbert 和.

c) 设函数 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下: 对于 $\lambda \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $f_n(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$; 对于 $\lambda \notin \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $f_n(\lambda) = 0$. 那么 $\lambda \mapsto \lambda f_n(\lambda)$ 就是 $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ 的特征函数, 所以 $vf_n(v) = r_n$, 由此得到

$$hr_n = hvf_n(v) = wf_n(v). \tag{6}$$

但是根据 a) 和 5.4.1(ii), w 和 r_n 是可交换的, 而根据 5.3.5(i), $f_n(v)$ 和 r_n 可交换, 所以 $(wf_n(v))(R_n) \subset R_n$. 等式 (6) 就表明 $R_n \subset D(h)$, $h(R_n) \subset R_n$, 以及 $h_n = h|_{R_n}$ 是 R_n 上的一个连续 Hermite 算子. 设 $(p_\lambda^n)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 是与 h_n 关联的恒等映射的分解. 我们有

$$h_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda^n.$$

d) 设 $h' = \bigoplus\limits_n h_n$, $h'' = h'|_{\sum\limits_n R_n}$. 这样 h' 是自共轭的 (6.5.7), 且 $h' = \overline{h''}$ (6.3.16). 显然 $h'' \subset h$. 因为 h 是闭算子, 所以 $h' \subset h$, 从而根据 6.5.6 可知 $h' = h$. 设 (p_λ) 是由 (p_λ^n) 作 Hilbert 和得到的恒等映射的分解. 那么根据 7.2.5,

$$h = h' = \bigoplus_n h_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda.$$

e) 设 $t \in \mathcal{L}(E)$. 设 t 和所有的 p_λ 可交换, 那么 t 和 h 也可交换 (7.2.4). 现在我们假设 t 和 h 可交换. 那么 t 和 v 也可交换 (6.1.11(i) 和 (ii)), 从而和 q_λ 可交换 (5.4.1(ii)), 这样 t 就被 R_n 化简. 假设条件 $th \subset ht$ 告诉我们, 在 R_n 中 $t|_{R_n}$ 和 h_n 可交换, 因此和 p_λ^n 也可交换 (5.4.1(ii)). 最后, 对于任意的 λ, t 和 p_λ 可交换.

f) 假设右连续的恒等映射的分解 (p'_λ) 满足 $h = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p'_\lambda$. 根据 7.2.4, 每个 p'_μ 都是和 h 可交换的, 因此根据 e), 也和任意的 p_λ 可交换. 根据 7.2.6(iv), 存在 E 的一族在每个 p_λ 和每个 p'_μ 下保持不变的闭线性子空间 $(E_i)_{i \in I}$, 以及 Hermite 元 $k_i \in \mathcal{L}(E_i)$, 使得 $E = \bigoplus\limits_i E_i$, $h = \bigoplus\limits_i k_i$. 我们令 $p_\lambda = \bigoplus\limits_{i \in I} p_\lambda^i$, $p'_\mu = \bigoplus\limits_{i \in I} p'^i_\mu$. 根据

3.5.12, $(p_\lambda^i)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 和 $(p_\mu'^i)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E_i 的恒等映射的分解. 根据 7.2.5, 我们有

$$k_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda^i = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda'^i.$$

如果没有一个紧区间使得 $(p_\lambda^i)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 在其外面是常值的话, 那么根据 7.2.6(ii), k_i 不是连续的; 从而 $(p_\lambda^i)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 在某个紧区间外取常值, 同理对于 $(p_\lambda'^i)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 也是如此. 根据 7.1.12, 我们知道, 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和任意的 $i\in I$, $p_\lambda^i = p_\lambda'^i$. 因此对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, $p_\lambda = p'_\lambda$.

7.3.2 推论. 任意自共轭算子都是一列连续 Hermite 算子的 Hilbert 和.

由 7.3.1 和 7.2.6(iv) 就可以得到这个结论 (实际上, 在 7.3.1 的证明 d) 部分中已经证明了这个结果).

7.3.3 定义. 利用 7.3.1 中的记号. 我们称 $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是与 h 关联的恒等映射的分解, 称 $(p_\lambda(E))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是与 h 关联的 E 的分解. 对于 $x, y\in E$, 我们称 $\mathrm{d}(p_\lambda x|y)$ 是由 x, y 和 h 定义的谱测度.

对于连续的 h, 我们重又得到在 5.4.2 和 5.3.1 中引入的概念.

7.3.4 定义. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 上的自共轭算子, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是与 h 关联的恒等映射的分解. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上一个复值 Borel 函数. 我们定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}p_\lambda = f(h).$$

对于连续的 h, 当 f 在 $\mathrm{Sp}\,h$ 上是一个连续函数的有界序列的极限时, 我们重又得到 5.3.4 中引进的概念 (参见 7.1.11).

7.3.5 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\mathrm{d}p_\lambda$ 是一个 E 上的自共轭算子, f 和 g 是 $\mathbb{R}$ 上两个复值 Borel 函数. 我们有 $f(h)+g(h)\subset(f+g)(h)$, 以及 $f(h)g(h)\subset(fg)(h)$.

由 7.2.2(i) 和 (ii) 容易得到关系式 $f(h)+g(h)\subset(f+g)(h)$. 设 $x\in D(f(h)g(h))$. 我们有 $x\in D(g(h))$, 且 $y = g(h)x\in D(f(h))$. 这样根据 7.2.4, 就有 $(p_\lambda y|y) = \|p_\lambda y\|^2 = \|g(h)p_\lambda x\|^2$, 从而由 7.2.2(iii) 推出

$$(p_\lambda y|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\mu)|^2\mathrm{d}(p_\mu p_\lambda x|x) = \int_{-\infty}^{\lambda} |g(\mu)|^2\mathrm{d}(p_\mu x|x),$$

由此得到 $\mathrm{d}(p_\lambda y|y) = |g(\lambda)|^2\mathrm{d}(p_\lambda x|x)$. 而另一方面, 因为 $y\in D(f(h))$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(fg)(\lambda)|^2\mathrm{d}(p_\lambda x|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\mathrm{d}(p_\lambda y|y) < +\infty.$$

这就证明了 $x\in D((fg)(h))$.

对于任意的 $z \in E$, 同理可得

$$(p_\lambda y|z) = (g(h)p_\lambda x|z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu)\mathrm{d}(p_\mu p_\lambda x|z) = \int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu)\mathrm{d}(p_\mu x|z),$$

所以 $\mathrm{d}(p_\lambda y|z) = g(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda x|z)$. 而另一方面, 因为我们有

$$\begin{aligned}(f(h)g(h)x|z) = (f(h)y|z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda y|z)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}(p_\lambda x|z) = ((fg)(h)x|z),\end{aligned}$$

从而得到 $f(h)g(h)x = (fg)(h)x$.

7.3.6 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 上的自共轭算子, (F_λ) (相应地, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$) 是与 h 关联的 E 的分解 (相应地, 恒等映射的分解). 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 设 E_λ 是相应的特征子空间, 并设 f_λ 是在 λ 处取值为 1, 而在 $\mathbb{R} - \{\lambda\}$ 上取值为 0 的函数.

(i) 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有 $E_\lambda = F_\lambda \ominus F_{\lambda-}$, 且 $P_{E_\lambda} = p_\lambda - p_{\lambda-} = f_\lambda(h)$;

(ii) 为使得某个实数是 (F_λ) 的不连续点, 必须且只需它是 h 的特征值;

(iii) 设 $x \in E$, μ_x 是由 x 和 h 定义的谱测度. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\mu_x(\{\lambda\}) = \|P_{E_\lambda}x\|^2 = (P_{E_\lambda}x|x).$$

设 (i) 对于一族自共轭算子都成立, 那么利用 7.2.5, 我们知道 (i) 对于它们的 Hilbert 和也成立. 但是 h 是一族连续 Hermite 算子的 Hilbert 和 (7.3.2), 而 (i) 对于连续 Hermite 算子成立 (5.4.10). 这样我们就证明了 (i), 而 (ii) 是 (i) 的推论. 结论 (iii) 的证明和 5.4.10 是一样的.

7.3.7 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 上的自共轭算子, (F_λ) 是与 h 关联的 E 的分解, $\mu \in \mathbb{R}$. 下述条件是等价的:

(i) $\mu \notin \mathrm{Sp}\, h$;

(ii) 存在一个包含 μ 的开区间, 使得 F_λ 在这个区间上是常值.

易见, 我们只需对于 $\mu = 0$ 证明这个结论即可.

假设存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $F_{-\varepsilon} = F_\varepsilon$. 根据 7.2.6(ii), h 是两个自共轭算子 h' 与 h'' 的 Hilbert 和, 其中 $h' \leqslant -\varepsilon$, $h'' \geqslant \varepsilon$. 根据 6.5.10, $0 \notin \mathrm{Sp}\, h'$, $0 \notin \mathrm{Sp}\, h''$, 即可知 $0 \notin \mathrm{Sp}\, h$.

现在假设对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $F_{-\varepsilon} \neq F_\varepsilon$, 我们来证明 $0 \in \mathrm{Sp}\, h$. 现在对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $x \in F_\varepsilon \ominus F_{-\varepsilon}$, 使得 $\|x\| = 1$. 根据 7.2.6(iii) 和 3.3.9(ii), 我们有 $\|hx\| \leqslant \varepsilon$. 因此, 要么 h 不是单射, 要么 h 是单射但是 h^{-1} 不连续.

7.3.8 从 7.3.7 我们可以知道, 由 h 定义的谱测度的支撑集都包含在 $\mathrm{Sp}\, h$ 中, 且我们可以对一个只是在 $\mathrm{Sp}\, h$ 上有定义的 Borel 函数 f 来定义 $f(h)$.

7.4 闭算子的极分解

7.4.1 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$ 是一个 E 上的自共轭算子, 满足 $\mathrm{Sp}\, h \subset [0, +\infty)$. 令 $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{1/2} \mathrm{d}p_\lambda$, 这是一个非负的自共轭算子. 我们有 $k^2 = h$.

根据 7.3.5, $k^2 \subset \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{1/2}\lambda^{1/2} \mathrm{d}p_\lambda = h$. 但是 k^2 是自共轭的 (6.5.12), 从而 $k^2 = h$ (6.5.6).

7.4.2 7.4.1 中的算子 k 称为 h 的**正平方根**, 记作 $h^{1/2}$. 如果 $h \in \mathcal{L}(E)$, 我们重新得到 5.1.9 中引进的一个概念.

7.4.3 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 上的算子. 下述条件是等价的:

(i) $u \geqslant 0$ 是自共轭的;

(ii) u 是自共轭的, 且 $\mathrm{Sp}\, u \subset [0, +\infty)$;

(iii) 存在一个自共轭算子 v, 使得 $u = v^2$;

(iv) 存在 E 中的一个稠定闭算子 w, 使得 $u = ww^*$.

根据 6.5.10, 有 (i)⇒(ii), 根据 7.4.1, 有 (ii)⇒(iii), 而 (iii)⇒(iv) 是显然的, 最后根据 6.5.12, 有 (iv)⇒(i).

7.4.4 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定闭算子. 因为 $u^*u \geqslant 0$ 是一个自共轭算子, 我们可以构造 $(u^*u)^{1/2}$ (7.4.2).

定义. 算子 $(u^*u)^{1/2}$ 称为 u 的绝对值, 记作 $|u|$ 或者 $\mathrm{abs}\, u$.

这个定义是 5.2.1 的推广.

7.4.5 定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定闭算子, $h = \mathrm{abs}\, u$.

(i) 我们有 $D(h) = D(u)$, 且对于任意的 $x \in D(u)$; $\|ux\| = \|hx\|$;

(ii) h 和 u 具有相同的核以及支撑.

首先我们注意到 $D(u^*u) \subset D(u)$, $D(h^2) \subset D(h)$, $D(u^*u) = D(h)$. 对于 $x \in D(u^*u)$, 我们有

$$\|ux\|^2 = (u^*ux|x) = (h^2x|x) = \|hx\|^2.$$

设 $y \in E$. 为使得 $y \in D(u)$, 根据 6.5.11(iii), 必须且只需存在 $D(u^*u)$ 中的序列 (y_n), 使得 $\|y_n - y\| \to 0$, 且 (uy_n) 有极限 (换句话说, 就是当 $m, n \to +\infty$ 时, $\|uy_m - uy_n\| \to 0$). 为使得 $y \in D(h)$, 对 h 应用 6.5.11(iii), 必须且只需存在 $D(h^2)$ 中的序列 (z_n), 使得 $\|z_n - y\| \to 0$, 且 $m, n \to +\infty$ 时, $\|hz_m - hz_n\| \to 0$. 因为

$D(u^*u) = D(h^2)$, 且对于 $x \in D(u^*u)$ 均成立 $\|ux\| = \|hx\|$, 我们得到 $D(h) = D(u)$. 此外, 用上述记号, 我们有 $uy = \lim uy_n$, $hz = \lim hz_n$, 从而我们知道, 对于任意 $x \in D(u^*u)$ 均成立的等式 $\|ux\| = \|hx\|$, 通过两边取极限的方式, 对于 $x \in D(u)$ 也都成立. 这样我们就证明了 (i), 而 (ii) 是 (i) 的直接推论.

7.4.6　定理. 设 E, F 是 Hilbert 空间, u 是一个从 E 到 F 的稠定闭算子, E_1 是 u 的支撑子空间, F_1 是 u^* 的支撑子空间, $h = \operatorname{abs} u$. 则存在 $\mathcal{L}(E;F)$ 中的唯一一个部分等距元 v, 具有下述性质:

(i) $u = vh$;

(ii) v 和 u 具有相同的核.

此外, $v|_{E_1}$ 是从 E_1 到 F_1 的酉算子.

利用 7.4.5, 我们只要按照 5.2.3 的证明一步步做下来就可以得到定理的证明.

7.4.7　7.4.6 中的分解 $u = vh$ 称为 u 的**极分解**. 这个概念是 5.2.4 中相应概念的推广.

7.4.8　定理. 所有闭算子都是一列连续线性算子的 Hilbert 和.

7.5　单参数酉算子群

7.5.1　设 E 是一个 Hilbert 空间, G 是 E 的酉群. 我们称一个从加法群 $\mathbb{R}$ 到 G 的同态为一个E **上酉算子的单参数群**, 换句话说, 就是一个从 $\mathbb{R}$ 到 G 的映射 $t \mapsto u_t$, 使得对于任意的 $t, t' \in \mathbb{R}$ 满足 $u_{t+t'} = u_t u_{t'}$.

这首先表明 $u_0 = 1$, 且对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $u_{-t} = u_t^{-1} = u_t^*$. 这些 u_t 是两两可交换的.

7.5.2　定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个 E 上酉算子的单参数群, A 是 E 的一个完全子集. 下述条件是等价的:

(i) 映射 $t \mapsto u_t$ 是强连续的;

(ii) 对于任意的 $x \in E$, 由 $\mathbb{R}$ 到 E 的映射 $t \mapsto u_t x$ 是连续的;

(iii) 对于任意的 $x \in A$, 当 $t \to 0$ 时 $(u_t x|x) \to (x|x)$.

(i) 和 (ii) 的等价性由 2.9.1(iii) 可得. (ii)⇒(iii) 是显然的. 现在假设条件 (iii) 成立. 对于任意的 $x \in A$, 当 $t \to 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\|u_t x - x\|^2 &= (u_t x|u_t x) - (u_t x|x) - (x|u_t x) + (x|x)\\ &= 2(x|x) - 2\mathrm{Re}(u_t x|x) \to 2(x|x) - 2\mathrm{Re}(x|x) = 0.\end{aligned}$$

若 B 是 E 中由 A 生成的线性子空间, 对于任意 $y \in B$, 当 $t \to 0$ 时, 我们有 $u_t y \to y$. 设 $z \in E$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in B$, 使得 $\|z - y\| \leqslant \varepsilon$; 然后存在 $\eta > 0$ 使得

$$|t| \leqslant \eta \Rightarrow \|u_t y - y\| \leqslant \varepsilon.$$

这样,

$$|t| \leqslant \eta \Rightarrow \|u_t z - z\| \leqslant \|u_t z - u_t y\| + \|u_t y - y\| + \|y - z\| \leqslant 3\varepsilon,$$

从而当 $t \to 0$ 时 $u_t z \to z$. 最后, 设 $t_0 \in \mathbb{R}$. 当 $t - t_0 \to 0$ 时, 我们有

$$u_t z = u_{t-t_0}(u_{t_0} z) \to u_{t_0} z,$$

这就证明了条件 (ii) 也满足.

7.5.3 例. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(\cdots, E_{-2}, E_{-1}, E_0, E_1, E_2, \cdots)$ 是 E 的一列闭线性子空间, 满足

$$E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n.$$

对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 设 u_t 是 $\mathcal{L}(E)$ 中的酉元, 在 E_n 中诱导系数为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 的位似变换. 显然, 在每一个 E_n 上 $u_{t+t'}$ 和 $u_t u_{t'}$ 重合, 所以 $u_{t+t'} = u_t u_{t'}$. 另一方面, 若 $x \in E_n$, 当 $t \to 0$ 时 $\|u_t x - x\| \to 0$, 从而单参数群 u_t 是强连续的.

在每个 E_n 中考虑系数为 n 的伸缩变换, 设 h 是这些变换的 Hilbert 和. 这是一个自共轭算子 (6.5.2), 且根据 7.2.5, $u_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ht}$.

注意对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $u_{t+2\pi} = u_t$.

7.5.4 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$ 是一个 E 上的自共轭算子. 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 定义

$$u_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ht} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}p_\lambda.$$

(i) $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ 是一个 E 上强连续的单参数酉算子群;

(ii) 每一个 u_t 都和 h 可交换;

(iii) 设 $x \in E$, 为使得 $x \in D(h)$, 必须且只需 $\dfrac{u_t - 1}{t} x$ 在 t 趋向于 0 时, 有不同于 0 的极限; 如果这种情况成立, 那么 $\lim\limits_{t \to 0, t \neq 0} \dfrac{u_t - 1}{t} x = \mathrm{i}hx$;

(iv) 如果 $x \in D(h)$, 那么定义在 $\mathbb{R}$ 上取值于 E 中的函数 $t \mapsto u_t x$ 是可导的; 导函数取值于 $D(h)$ 中, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_t x) = \mathrm{i}h u_t x = \mathrm{i}u_t h x.$$

(i) 根据 7.1.9, 我们有

$$u_t u_t^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}}\, \mathrm{d}p_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_\lambda = 1,$$

同理 $u^* u = 1$, 从而 u 是一个酉算子. 若 $t, t' \in \mathbb{R}$, 则我们有

$$u_t u_{t'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t'}\, \mathrm{d}p_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda (t+t')}\, \mathrm{d}p_\lambda = u_{t+t'}.$$

另一方面, 若 $x \in E$, 根据 7.1.6, 我们有

$$(u_t x|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}(p_\lambda x|x),$$

而根据 Lebesgue 定理, 当 $t \to 0$ 时这个积分收敛于 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(p_\lambda x|x) = (x|x)$.

(ii) 每个 u_t 都和任意的 p_λ 可交换, 从而和 h 可交换 (我们用两遍 7.2.4).

(iii) 设 $x \in D(h)$. 对于任意满足 $t \neq 0$ 的 $t \in \mathbb{R}$, 根据 7.2.2(iii) 和 7.3.5, 我们有

$$\left\|\frac{u_t - 1}{t}x - \mathrm{i}hx\right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{t} - \mathrm{i}\lambda\right|^2 \mathrm{d}(p_\lambda x|x).$$

同时, 对于任意的 $b \in \mathbb{R}$, 我们有初等不等式 $|\sin b| \leqslant |b|$, $|1 - \cos b| \leqslant |b|$; 所以

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{t} - \mathrm{i}\lambda\right|^2 &= \left|\frac{\cos\lambda t - 1}{t} + \mathrm{i}\left(\frac{\sin\lambda t}{t} - \lambda\right)\right|^2 = \frac{(\cos\lambda t - 1)^2}{t^2} + \left(\frac{\sin\lambda t}{t} - \lambda\right)^2 \\ &= \frac{(\cos\lambda t - 1)^2}{t^2} + \lambda^2\left(\frac{\sin\lambda t}{\lambda t} - 1\right)^2 \leqslant \frac{\lambda^2 t^2}{t^2} + \lambda^2 \cdot 2^2 = 5\lambda^2.\end{aligned}$$

而 $\mathbb{R}$ 上的函数 $\lambda \mapsto 5\lambda^2$ 和 t 无关, 并且由于 $x \in D(h)$, 它关于 $\mathrm{d}(p_\lambda x|x)$ 是可积的 (5.2.2(i)). 另一方面, 当 $t \to 0$ 且 $t \neq 0$ 时, 函数 $\lambda \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{t} - \mathrm{i}\lambda$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛到 0. 根据 Lebesgue 定理, 我们得到 $\left\|\dfrac{u_t - 1}{t}x - \mathrm{i}hx\right\| \to 0$.

反之, 设 $x \in E$, 并假设 $t \to 0$ 且 $t \neq 0$ 时, $\left\|\dfrac{u_t - 1}{t}x\right\|$ 是有界的. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{d}(p_\lambda x|x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to 0, t\neq 0} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{t}\right|^2 \mathrm{d}(p_\lambda x|x) \\ &\leqslant \liminf_{t\to 0, t\neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{t}\right|^2 \mathrm{d}(p_\lambda x|x) \quad \text{(Fatou 定理)} \\ &= \liminf_{t\to 0, t\neq 0} \left\|\frac{u_t - 1}{t}x\right\|^2 \quad (7.2.2(\text{iii})) \\ &< +\infty \quad \text{(根据假设)}.\end{aligned}$$

所以 $x \in D(h)$ (7.2.2(i)).

(iv) 设 $x \in D(h)$. 根据 (ii), 我们有 $u_t x \in D(h)$, 且对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $hu_t x = u_t hx$. 另一方面, 设 $t \in \mathbb{R}$; 对于任意的 $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$, 我们有

$$\frac{u_{t+\varepsilon}x - u_t x}{\varepsilon} = u_t \frac{u_\varepsilon x - x}{\varepsilon},$$

而当 $\varepsilon \to 0$ 时, 根据 (iii), 这个向量收敛到 $u_t \mathrm{i}hx$.

7.5.5 定理 (Stone). 设 E 是一个 Hilbert 空间, $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个 E 上强连续的单参数酉算子群. 存在唯一的 E 中自共轭算子 $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$, 使得对于任意的 $t \in \mathbb{R}$ 都有

$$u_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ht} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}p_\lambda.$$

a) h 的唯一性可以由 7.5.4(iii) 得到.

b) 首先我们假设 $u_{2\pi} = 1$, 这样对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $u_{t+2\pi} = u_t$. 对于任意的 x, $y \in E$, 考虑连续周期函数 $t \mapsto (u_t x|y)$ 的 Fourier 系数, 即定义

$$c_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}(u_t x|y)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

我们有

$$|c_n(x,y)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(u_t x|y)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|u_t\|\|x\|\|y\|\,\mathrm{d}t = \|x\|\|y\|,$$

从而 c_n 是 $E\times E$ 上的连续半双线性型. (根据 2.4.3) 存在 E 上的一个连续线性算子 p_n, 使得对于任意的 x, $y \in E$, 有

$$c_n(x,y) = (p_n x|y).$$

我们有

$$\begin{aligned}
\overline{(p_n y|x)} &= \frac{1}{2\pi}\overline{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}(u_t y|x)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}(x|u_t y)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(2\pi-s)}(x|u_{2\pi-s}y)\,\mathrm{d}s \quad (\text{作坐标变换 } t = 2\pi - s) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}(x|u_{-s}y)\,\mathrm{d}s \quad (\text{因为 } u_{2\pi} = 1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}(u_s x|y)\,\mathrm{d}s \quad (\text{因为 } u_{-s} = u_s^{-1} = u_s^*) \\
&= (p_n x|y),
\end{aligned}$$

因此 p_n 是 Hermite 算子. 而另一方面,

$$\begin{aligned}
(u_t p_n x|y) = (p_n x|u_{-t}y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}(u_s x|u_{-t}y)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}(u_{s+t}x|y)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_t^{2\pi+t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(s-t)}(u_s x|y)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} e^{int} \int_0^{2\pi} e^{-ins}(u_s x|y) \, ds \\
&= e^{int}(p_n x|y) = (e^{int} p_n x|y),
\end{aligned}
$$

因此

$$
u_t p_n = e^{int} p_n. \tag{7}
$$

此外,

$$
\begin{aligned}
(p_m p_n x|y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt}(u_t p_n x|y) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} e^{int}(p_n x|y) \, dt \quad (\text{根据 } (7)) \\
&= \frac{1}{2\pi}(p_n x|y) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \, dt,
\end{aligned}
$$

这样, 若 $m \neq n$, 我们得到 $(p_m p_n x|y) = 0$, 即 $p_m p_n = 0$. 若 $m = n$, 我们得到 $(p_m p_n x|y) = (p_n x|y)$, 即 $p_n^2 = p_n$. 因此 p_n 都是投影, 且 $E_n = p_n(E)$ 两两正交. 定义

$$
F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n, \quad G = F^{\perp}.
$$

对于任意的 $x, y \in E$, 因为 E_n 和 G 正交, 我们有

$$
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int}(u_t P_G x|y) \, dt = (p_n P_G x|y) = 0.
$$

这样, 连续周期函数 $t \mapsto (u_t P_G x|y)$ 的 Fourier 系数都为 0, 于是对于任意的 t, $(u_t P_G x|y) = 0$, 特别有 $(P_G x|y) = 0$. 因此 $P_G = 0$, 所以

$$
\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n = E.
$$

根据 (7), 对于任意的 $x \in E_n$, $u_t x = e^{int} x$.

设 $\mathcal{L}(E)$ 的一个元素 w 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$ 满足 $w u_t = u_t w$. 那么对于任意的 x, $y \in E$, 我们有

$$
\begin{aligned}
(p_n w x|y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int}(u_t w x|y) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int}(w u_t x|y) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int}(u_t x|w^* y) \, dt \\
&= (p_n x|w^* y) = (w p_n x|y),
\end{aligned}
$$

因此

$$wp_n = p_n w. \tag{8}$$

c) 现在来考虑一般情况. 设 $(q_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 $u_{2\pi}$ 对应的恒等映射的分解 (具体构造参见 5.6.3). 根据 5.6.2(i), 对于任意的 λ 和 t, q_λ 和 u_t 是可交换的. 定义

$$v_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t/2\pi}\, \mathrm{d}q_\lambda.$$

根据 7.5.4, $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 E 中强连续单参数酉算子群. 因为 (对于任意的 s) u_s 和所有的 q_λ 可交换, (根据 7.2.4, 对于任意的 t) u_s 和 v_t 可交换. 记 $w_t = u_t v_t^{-1}$. 我们有

$$w_{t+t'} = u_{t+t'}v_{t+t'}^{-1} = u_t u_{t'} v_{t'}^{-1} v_t^{-1} = u_t v_t^{-1} u_{t'} v_{t'}^{-1} = w_t w_{t'}.$$

映射 $t \mapsto u_t$ 和 $t \mapsto v_t^{-1} = v_{-t}$ 是强连续的, 因此 (根据 2.9.9(iii)) 映射 $t \mapsto w_t$ 是强连续的. 综上所述, $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 E 中强连续单参数酉算子群. 而另一方面 (根据 5.6.4(iii))

$$v_{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\, \mathrm{d}q_\lambda = u_{2\pi},$$

因此 $w_{2\pi} = 1$.

这样我们就可以对 $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 应用 b) 中结果. 那么 E 就是闭线性子空间 E_n ($n \in \mathbb{Z}$) 的 Hilbert 和, 且 $w_t|_{E_n}$ 是系数为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 的位似变换. 此外, u_s, v_s (根据 5.6.2(i), q_λ 也) 和所有的 w_t 都是可交换的, 所以这些算子都被 E_n 化简 (参见 (8)). 根据 3.5.12, 在每一个 E_n 中存在一个恒等映射的分解 $(q_\lambda^n)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 使得 $(q_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 $(q_\lambda^n)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的 Hilbert 和. 记 $p_\lambda^n = q_{2\pi(\lambda-n)}^n$. 显然 $(p_\lambda^n)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 E_n 中恒等映射的一个分解. 对于 $x, y \in E$, 我们有

$$\begin{aligned} u_t|_{E_n} &= w_t v_t|_{E_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} v_t|_{E_n} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t/2\pi}\, \mathrm{d}q_\lambda^n \quad (\text{根据 } 7.2.5) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}p_\lambda^n. \end{aligned}$$

设恒等映射的分解 (p_λ) 是 $(p_\lambda^n)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的 Hilbert 和. 那么根据 7.2.5, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}p_\lambda = \bigoplus_n (u_t|_{E_n}) = u_t.$$

换句话说, 如果我们定义 $h = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$, 那么对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $u_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ht}$.

7.5.6 在 7.4.4 和 7.4.5 的条件下, 我们称 $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是**由** $\mathrm{i}h$ **生成**的单参数群, 称 $\mathrm{i}h$ 是 $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 的**无穷小生成元**. 直观的想法是, 对于非常小的 ε, u_ε 差不多等于 $1 + \varepsilon\mathrm{i}h$, 而另一方面, 任意的 u_t 都可以由足够多的这样的 u_ε 相乘而得到.

7.6 应用: Bochner 定理

7.6.1 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上有界测度. 我们称 $\mathbb{R}$ 上由

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}\mu(s)$$

定义的复值函数为μ **的** Fourier **变换**.

7.6.2 定理. 设 m 是 $\mathbb{R}$ 上复值函数. 为使 m 是 $\mathbb{R}$ 上某个有界正测度 μ 的 Fourier 变换, 必须且只需满足下面两个条件:

(i) m 是连续的;

(ii) 对于任意的有限复数组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和有限实数组 $(t_1,\cdots,t_n)$, 都有

$$\sum_{i,j=1}^{n} m(t_i-t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} \geqslant 0.$$

设存在 $\mathbb{R}$ 上的一个正测度 μ 使得对于任意的 $t\in\mathbb{R}$,

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}\mu(s).$$

那么根据 Lebesgue 定理, m 是连续的. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C}$, $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R}$; 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} m(t_j-t_k)\alpha_j\overline{\alpha_k} &= \sum_{j,k=1}^{n}\alpha_j\overline{\alpha_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t_j-t_k)s}\,\mathrm{d}\mu(s)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_j\overline{\alpha_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_js}\,\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_ks}}\,\mathrm{d}\mu(s)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_js}\right)\overline{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_ks})}\,\mathrm{d}\mu(s)\geqslant 0.\end{aligned}$$

反之, 设 m 满足定理中的条件 (i) 和 (ii). 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上所有除有限个点外取值都为 0 的函数全体. 对于 $f,g\in A$, 定义

$$(f|g) = \sum_{s,t\in\mathbb{R}} m(t-s)f(t)\overline{g(s)}.$$

易见 $(\cdot\mid\cdot)$ 是 $A\times A$ 上的一个半双线性型, 且条件 (ii) (根据 1.2.5) 推出它是半正定 Hermite 型. 这样 A 就是一个准 Hilbert 空间. 设 A_0 是对于所有的 $x'\in A$ 都有 $(x|x')=0$ 的 $x\in A$ 全体. 那么 (根据 1.4.5) $B=A/A_0$ 就以一种典范的方式成为一个分离的准 Hilbert 空间. 设 C 是由 B (按照 1.10.3) 做完备化得到的 Hilbert 空间.

设 $t \in \mathbb{R}$. 以 u_t 记 A 到自身的映射 $(u_t f)(s) = f(s+t)$. 这样 u_t 是 A 的一个自同态, $u_0 = 1$, $u_t u_{t'} = u_{t+t'}$. 若 f, $g \in A$, 我们有

$$\begin{aligned}(u_t f|u_t g) &= \sum_{s_1, s_2 \in \mathbb{R}} m(s_1 - s_2) f(s_1 + t) \overline{g(s_2 + t)} \\ &= \sum_{s_1, s_2 \in \mathbb{R}} m(s_1 - t - s_2 + t) f(s_1) \overline{g(s_2)} = (f|g).\end{aligned} \tag{9}$$

特别地, 若 $f \in A_0$, 对于任意的 $g \in A$ 我们有

$$(u_t f|g) = (f|u_{-t} g) = 0,$$

所以 $u_t f \in A_0$. 取商, 我们由 u_t 得到 B 上连续线性算子 v_t. 我们有 $v_0 = 1$, $v_t v_{t'} = v_{t+t'}$. 等式 (9) 推出, 对于任意的 x, $y \in B$,

$$(v_t x|v_t y) = (x|y). \tag{10}$$

特别对于任意 $x \in B$ 有 $\|v_t x\| = \|x\|$. 因此 (根据 2.2.2) v_t 可以唯一地扩张到 C 上连续线性算子 w_t. 我们有 $w_0 = 1$, $w_t w_{t'} = w_{t+t'}$. 等式 (10) 推出, 对于任意的 x, $y \in C$,

$$(w_t x|w_t y) = (x|y).$$

因此 w_t 是等距映射. 又因为 $w_t w_{-t} = w_{-t} w_t = w_0 = 1$, w_t 还是酉算子. 这样 $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 C 中一个单参数酉算子群. 这个单参数群是强连续的; 因为对于 $x \in B$ 和 x 在 A 中的一个代表元 f 而言, 我们有

$$\begin{aligned}(w_t x|x) = (v_t x|x) = (u_t f|f) &= \sum_{s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}} m(s_1 - s_2) f(s_1 + t) \overline{f(s_2)} \\ &= \sum_{s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}} m(s_1 - s_2 - t) f(s_1) \overline{f(s_2)};\end{aligned}$$

当 $t \to 0$ 时, 最后这个表达式趋向于

$$\sum_{s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}} m(s_1 - s_2) f(s_1) \overline{f(s_2)} = (f|f) = (x|x),$$

因为 m 是连续的; 然后再应用 7.5.2 就可以了.

设 h 是 $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 的无穷小生成元, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 h 对应的恒等映射的分解. 设 A 中元素 f_0 满足: $f_0(0) = 1$, 而当 $t \neq 0$ 时, $f_0(t) = 0$. 设 x_0 是 f_0 在 B 中的投影像. 我们有

$$m(t) = (u_{-t} f_0|f_0) = (v_{-t} x_0|x_0) = (w_{-t} x_0|x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}(p_\lambda x_0|x_0),$$

从而 m 是有界正测度 $\mathrm{d}(p_\lambda x_0|x_0)$ 的 Fourier 变换.

7.7 量子力学的语言

7.7.1 当我们研究一个经典力学系统时, 系统的状态是某个拓扑空间中的点; 和系统关联的各个可观测 (物理) 量是状态空间上的实值函数. 如果我们在系统的状态 x 测量物理量 f, 我们将会得到 $f(x)$.

当我们研究一个量子力学系统时, (至少按照量子力学的某一种形式) 系统的状态是某个 Hilbert 空间中范数为 1 的元素; 和系统关联的各个可观测量是 E 中的自共轭算子. 对于给定的状态 x 和一个可观测量 h, 在 x 处测量 h 得到的将不是一个确定的数值, 而是一个 "谱", 即按照某种概率分布给出 $\mathbb{R}$ 中的一些可能的值: 这个概率分布就是 x 和 h 定义的谱测度.

7.7.2 "定理". *设* $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$ *是可观测量* h *的谱分解. 设* x *是系统的一个状态.*

i) h *在状态* x *取值落在区间* $(a,b]$ *中的概率是* $(p_b x|x) - (p_a x|x) = \|(p_b - p_a)x\|^2$;

ii) 如果 $x \in D(h)$, *那么* h *在状态* x *的平均值存在, 且为* $m = (hx|x)$;

iii) 如果 $x \in D(h)$, *那么* h *在状态* x *的偏差*①*是* $\|(h-m)x\|$;

iv) 为了使 h *在状态* x *以概率 1 取某个确定的值, 必须且只需* x *是* h *的一个特征向量*②.

设 μ_x 是由 x 和 h 定义的谱测度. (i) 中所求的概率就是

$$\begin{aligned}\mu_x((a,b]) &= \mu_x((-\infty,b]) - \mu_x((-\infty,a]) \\ &= (p_b x|x) - (p_a x|x) \quad (\text{根据 } 7.3.3) \\ &= ((p_b - p_a)x|x),\end{aligned}$$

因为 $p_b - p_a$ 是一个投影, 所以这个数就等于 $\|(p_b - p_a)x\|^2$.

当 $\mathbb{R}$ 上函数 $\lambda \mapsto \lambda$ 是 μ_x 可积的时候, (ii) 中所求的平均值存在, 且为

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}\mu_x(\lambda).$$

如果 $x \in D(h)$, 那么根据 7.2.2(i), $\mathbb{R}$ 上函数 $\lambda \mapsto \lambda$ 关于 μ_x 是平方可积的; 另一方面, 因为 μ_x 是有界的, 所以 $\mathbb{R}$ 上函数 $\lambda \mapsto 1$ 关于 μ_x 是平方可积的. 所以函数 $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1$ 是 μ_x 可积的. 根据 7.2.2(ii), 我们有

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}(p_\lambda x|x) = (hx|x).$$

---

①译者注: 原文是 dispersion, 意指可观测量在某个态上相对于平均 (期望) 值的方差.

②译者注: 中文物理文献一般称 "算子" 为 "算符", "特征值" 为 "本征值", "特征向量" 为 "本征态".

我们仍然假设 $x \in D(h)$. 按照定义, (iii) 中所求的偏差 δ 满足

$$\delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - m)^2 \mathrm{d}\mu_x(\lambda).$$

因此,

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - m)^2 \mathrm{d}(p_\lambda x|x) \\ &= \|(h-m)x\|^2 \quad (\text{根据 } 7.2.2(\text{iii}) \text{ 和 } 7.3.5(\text{ii})).\end{aligned}$$

称 h 在状态 x 以概率 1 取某个确定的值, 就是说存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $\mu_x(\{\lambda_0\}) = 1$. 但是根据 7.3.6, 条件 $\mu_x(\{\lambda_0\}) = 1$ 就意味着 x 是 h 的关于特征值 λ_0 的一个特征向量.

7.7.3 存在一个 E 上强连续的单参数酉算子群 $t \mapsto v_t$, 使得对于时刻 0 的系统状态 x_0, $v_t x_0$ 是系统在时刻 t 的状态. 这个群的无穷小生成元记为 $\mathrm{i}k$, 其中 k 是一个自共轭算子, 我们称 k 为**系统的** Hamilton **量**. 和这个可观测量对应的物理量就是能量.

换句话说, 如果以 x_t 表示系统在时刻 t 的状态, 且假设 $x_0 \in D(k)$, 我们就有, 对于任意的 t, $x_t \in D(k)$, 且 (根据 7.5.4(iv))

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}kx_t{}^{①}.$$

7.7.4 设 h 是一个可观测量, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是与 h 关联的 E 的分解. 如果 h 的点谱是空集, 那么就不存在使得 h 取确定值的系统的态 (7.7.2(iv)). 但是还是存在 h"几乎取确定值", 也就是偏差很小的态. 事实上, 设 a 是 h 的一个谱点, 并设 $\varepsilon > 0$ 非常小. 根据 7.3.7, 我们有 $p_{a+\varepsilon} \neq p_{a-\varepsilon}$. 设 x 是 $(p_{a+\varepsilon} - p_{a-\varepsilon})(E)$ 中的一个长度为 1 的向量. 那么对于系统的状态 x, 可观测量 h 的取值落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 中的概率就是 1 (7.7.2(i)). 更具体地说:

7.7.5 定理. *设* $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}p_\lambda$, $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}q_\lambda$ *是可观测量. 记* h *(相应地,* k*) 在状态* x *处的偏差为* $\delta(h,x)$ *(相应地,* $\delta(k,x)$*). 设* $\varepsilon > 0$*. 如果对于任意的* λ *和* μ, p_λ *和* q_μ *都是可交换的, 那么存在状态* $x \in D(h) \cap D(k)$, *使得* $\delta(h,x) \leqslant \varepsilon$, *且* $\delta(k,x) \leqslant \varepsilon$.

设 $\eta > 0$. 我们知道存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $p_{a+\eta} \neq p_a$. 对于 $\mu \in \mathbb{R}$, 令 $r_\mu = (p_{a+\eta} - p_a)q_\mu$. 因为 p_λ 和 q_μ 可交换, 所以 $(r_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ 是一族递增的投影算子. 我们有 $r_{-\infty} = 0$, $r_{+\infty} = p_{a+\eta} - p_a$. 所以存在 $b \in \mathbb{R}$, 使得 $r_{b+\eta} - r_b \neq 0$. 设 x 是 $(r_{b+\eta} - r_b)(E)$ 中范数为 1 的向量. 我们有 $(p_{a+\eta} - p_a)x = x$, $(q_{b+\eta} - q_b)x = x$. 对于状态 x, 可观测量 h

①译者注: 这就是 Schrödinger 方程的一般形式.

取值在 $(a, a+\eta]$ 中的概率为 1, 可观测量 k 取值在 $(b, b+\eta]$ 中的概率为 1. 如果 η 充分小的话, 那么我们就有 $\delta(h,x) \leqslant \varepsilon$, 且 $\delta(k,x) \leqslant \varepsilon$.

7.7.6 然而, 当 p_λ 和 q_μ 不可交换的时候, 7.7.5 中的结论就有可能不成立. 例如, 在有的情形下, 一个粒子的位置和动量对应于 $L^2(\mathbb{R})$ 中的如下自共轭算子 h 和 k:

h 是算子 $f(\lambda) \mapsto \lambda f(\lambda)$, 定义在所有满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\lambda < +\infty$ 的函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 组成的集合上 (参见 6.5.2);

k 是算子 $f(\lambda) \mapsto -\mathrm{i}f'(\lambda)$, 定义在所有使得分布意义下的导数 f' 仍旧属于 $L^2(\mathbb{R})$ 的那些函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 组成的集合上 (我们可以用类似于 8.4 中的理由证明 k 是一个自共轭算子; 简单说来, 我们首先注意到 Fourier 变换是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个酉变换, 记作 w, 而 $k = whw^{-1}$; 因为 h 是自共轭的, 所以坐标变换后得到的 k 也是自共轭的).

设 $f \in D(h) \cap D(k)$, $\|f\| = 1$. 设 $m = (hf|f)$, $m' = (kf|f)$, 并记相应的方差为 $\delta = \|(h-m)f\|$, $\delta' = \|(k-m')f\|$. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们知道 $\delta\delta' \geqslant |((h-m)f|(k-m')f)|$. 而复数

$$((h-m)f|(k-m')f) = (hf|kf) - m(f|kf) - m'(hf|f) + mm'(f|f)$$

的共轭复数是

$$(kf|hf) - m(kf|f) - m'(f|hf) + mm'(f|f) = (kf|hf) - m(f|kf) - m'(f|hf) + mm'(f|f),$$

从而它的虚部就是 $\frac{1}{2}((hf|kf) - (kf|hf))$. 所以

$$2\delta\delta' \geqslant |(hf|kf) - (kf|hf)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(\lambda)\overline{f'(\lambda)}\mathrm{d}\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \overline{f(\lambda)} f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda \right|. \tag{11}$$

设 $a, b \in \mathbb{R}$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(\lambda)\overline{f'(\lambda)}\mathrm{d}\lambda + \int_a^b \lambda \overline{f(\lambda)} f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda &= \int_a^b \lambda (f\overline{f})'(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= b|f(b)|^2 - a|f(a)|^2 - \int_a^b |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\lambda. \end{aligned} \tag{12}$$

当 $b \to +\infty$ 时, 因为 $\lambda f(\lambda)$, $f'(\lambda)$ 和 $|f(\lambda)|^2$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 所以积分 $\int_a^b \lambda f(\lambda)\overline{f'(\lambda)}\mathrm{d}\lambda$, $\int_a^b \lambda\overline{f(\lambda)}f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 和 $\int_a^b |f(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda$ 都有有限的极限. 因此 $b|f(b)|^2$ 也有有限的极限, 记为 l. 如果 $l \neq 0$, 那么我们知道, 当 $b \to +\infty$ 时, $|f(b)|^2 \sim lb^{-1}$, 而这是不可能的, 因为 $f \in L^2(\mathbb{R})$. 所以 $l = 0$. 同理, 当 $a \to -\infty$ 时, $a|f(a)|^2 \to 0$. 这样, 等式 (12) 在 $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ 时, 就给出

$$\int_a^b \lambda f(\lambda)\overline{f'(\lambda)}\mathrm{d}\lambda + \int_a^b \lambda\overline{f(\lambda)}f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b |f(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda = -1.$$

结合 (11), 我们就得到, 对于 $f \in D(h) \cap D(k)$, $\|f\| = 1$, 成立

$$\delta\delta' \geqslant \frac{1}{2}. \tag{13}$$

关系式 (13) 就是 Heisenberg **测不准原理**的精确描述.

附带提一句, 对于 $f \in D(hk - kh)$, 通过简单计算就可得到

$$(hk - kh)f = \mathrm{i}f.$$

VIII 对称算子

8.1 对称算子的定义

8.1.1 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的稠定算子. 下述条件是等价的:

(i) 对于任意的 $x, y \in D(h)$, 都有 $(hx|y) = (x|hy)$;

(ii) 对于任意的 $x \in D(h)$, 都有 $(hx|x) \in \mathbb{R}$;

(iii) $h \subset h^*$.

(i)⇔(ii): 对于 $D(h)$ 上的半双线性型 $(x, y) \mapsto (hx|y)$ 应用 1.2.5 即可.

现在假设条件 (i) 满足. 那么, 对于任意的 $y \in D(h)$, 我们有 $y \in D(h^*)$, 且 $h^*y = hy$. 所以 $h \subset h^*$. 逆命题是显然的.

8.1.2 定义. 满足 8.1.1 中条件的算子称为对称算子.[①]

8.1.3 自共轭算子都是对称算子, 但是我们将会看到, 存在对称算子不是自共轭算子的重要的例子, 这样的算子没有谱分解.

为了补救这种情况带来的不便, 我们首先注意到, 如果对称算子 h 和 k 满足 $h \subset k$, 我们就有 $k^* \subset h^*$, 即

$$h \subset k \subset k^* \subset h^*. \tag{1}$$

这样比起 h 来, k 就更有希望称为自共轭算子. 这样, 从一个对称算子出发, 我们将研究它的各种对称扩张, 并从中寻找可能的自共轭算子.

[①]译者注: 原文直译是 "Hermite 算子", 现根据当前通行的习惯修改.

8.1.4 下面的定理表明, 在上述方案中, 我们只要考虑闭对称算子即可.

定理. *如果 h 是对称算子, 那么 h 是可闭的, $\overline{h}$ 也是对称算子, 且 $h \subset \overline{h} \subset h^*$.*

因为 $D(h^*) \supset D(h)$, 所以 $D(h^*)$ 是稠密的, 从而 h 是可闭的. 又因为 $h \subset h^*$, 我们有 $h^* \supset h^{**} = \overline{h}$, 所以 $h^{**} \subset h^{***}$, 这就证明了 h^{**} 是对称算子.

8.1.5 **定理.** *设 h 是对称算子. 如果 k 是 h 的一个对称扩张, 那么我们有 $h \subset k \subset h^*$.*

这是 (1) 的推论.

这样, 为了得到 h 的最一般的对称扩张, 我们只需把 h^* 限制到 $D(h^*)$ 的一个适当选择的包含 $D(h)$ 的子空间上即可. 因此, 我们将研究 $D(h^*)$ 中包含 $D(h)$ 的子空间.

8.1.6 我们在 $D(h^*)$ 上引进两个半双线性型:

(i) 根据 6.1.7, 对于 $x, y \in D(h^*)$, 我们定义:

$$(x|y)_{h^*} = (x|y) + (h^*x|h^*y); \quad \|x\|_{h^*} = (x|x)_{h^*}^{1/2}.$$

(ii) 对于 $x, y \in D(h^*)$, 我们也定义:

$$\{x, y\} = \mathrm{i}((x|h^*y) - (h^*x|y)).$$

我们有

$$\{x, x\} = 2\,\mathrm{Im}(h^*x|x) \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

从而 $\{\cdot, \cdot\}$ 是一个 Hermite 型. 它的核 N 就是 $D(\overline{h})$. 事实上, 对于 $x \in D(\overline{h}) = D(h^{**})$, 我们有 $x \in D(h^*)$, 且对于任意的 $y \in D(h^*)$,

$$-\mathrm{i}\{x, y\} = (x|h^*y) - (h^*x|y) = (x|h^*y) - (h^{**}x|y) = 0,$$

因此 $x \in N$. 反之, 若 $x \in N$, 则对于任意的 $y \in D(h^*)$, 我们有

$$(x|h^*y) = (h^*x|y),$$

从而 $x \in D(h^{**})$.

8.2 亏指数

8.2.1 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的对称算子. 我们记所有满足 $h^*x = \mathrm{i}x$ (相应地, $h^*x = -\mathrm{i}x$) 的 $x \in D(h^*)$ 全体构成的集合为 $D_+(h)$ (相应地, $D_-(h)$). 我们称之为 h 的**正** (相应地, **负**) **亏子空间**.

因为 h^* 是闭算子, 所以 $D_+(h)$ 和 $D_-(h)$ 是 E 的闭子空间. 它们的 Hilbert 维数称为 h 的**正亏指数**和**负亏指数**.

显然, 当我们把 h 换成它的闭包时, $D_+(h)$ 和 $D_-(h)$ 保持不变.

8.2.2 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的闭对称算子. 那么具有图像 Hilbert 空间结构的 $D(h^*)$ 是 $D(h)$, $D_+(h)$ 和 $D_-(h)$ 的 Hilbert 和.

因为 h 是闭的, 且 $h \subset h^*$, 所以由 $D(h^*)$ 的图像 Hilbert 空间结构诱导的 $D(h)$ 上的图像 Hilbert 空间结构是完备的. 因此 $D(h)$ 是 Hilbert 空间 $D(h^*)$ 中的闭子空间.

设 (x_n) 是 $D_+(h)$ 中的一列点, $x \in D(h^*)$, 满足 $\|x_n - x\|_{h^*} \to 0$. 从而 $\|x_n - x\| \to 0$, 所以 $x \in D_+(h)$. 这样, $D_+(h)$ 是 Hilbert 空间 $D(h^*)$ 中的闭子空间, $D_-(h)$ 亦然.

设 $x \in D(h)$, $y \in D_+(h)$, $z \in D_-(h)$. 我们有

$$\begin{aligned}(x|y)_{h^*} &= (x|y) + (h^*x|h^*y) = (x|y) + (h^*x|\mathrm{i}y)\\ &= (x|y) + (x|\mathrm{i}h^*y) = (x|y) + (x|\mathrm{i}^2y) = 0,\\ (x|z)_{h^*} &= (x|z) + (h^*x|h^*z) = (x|z) + (h^*x|-\mathrm{i}z)\\ &= (x|z) + (x|-\mathrm{i}h^*z) = (x|z) + (x|\mathrm{i}^2z) = 0,\\ (y|z)_{h^*} &= (y|z) + (h^*y|h^*z) = (y|z) + (\mathrm{i}y|-\mathrm{i}z) = 0.\end{aligned}$$

这样, 在 Hilbert 空间 $D(h^*)$ 中, $D(h)$, $D_+(h)$ 和 $D_-(h)$ 是两两正交的. 最后, 设 $t \in D(h^*)$ 是 Hilbert 空间 $D(h^*)$ 中与 $D(h)$, $D_+(h)$ 和 $D_-(h)$ 都正交的元素. 对于任意的 $x \in D(h)$, 我们有 $0 = (x|t)_{h^*} = (x|t) + (h^*x|h^*t)$, 从而 $(hx|h^*t) = (x|-t)$. 这就证明了 $h^*t \in D(h^*)$, 且 $h^*h^*t = -t$. 由此我们得到 $h^*(1-\mathrm{i}h^*)t = h^*t + \mathrm{i}t = \mathrm{i}(1-\mathrm{i}h^*)t$, 所以 $(1-\mathrm{i}h^*)t \in D_+(h)$. 另一方面, 对于任意的 $y \in D_+(h)$, 我们有

$$0 = (y|t)_{h^*} = (y|t) + (h^*y|h^*t) = (y|t) + (\mathrm{i}y|h^*t) = (y|(1-\mathrm{i}h^*)t).$$

根据上文, 知道 $(1-\mathrm{i}h^*)t \in D_+(h)$, 我们得到 $(1-\mathrm{i}h^*)t = 0$, 即 $h^*t = -\mathrm{i}h^*t$, 即 $t \in D_-(h)$. 最后, 对于任意的 $z \in D_-(h)$, 我们有 $(z|t)_{h^*} = 0$, 因为 $t \in D_-(h)$, 最终得到 $t = 0$.

8.2.3 推论. 为使得一个闭对称算子是自共轭的, 必须且只需它的亏指数都是 0.

事实上, 利用 8.2.2 中的记号, 我们有

$$D(h) = D(h^*) \quad \Leftrightarrow \quad D_+(h) = D_-(h) = 0.$$

8.2.4 推论. 设 h 是一个闭对称算子. 设 $\mathscr{S}$ 是 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 的线性子空间全体, $\mathscr{S}'$ 是 $D(h^*)$ 中包含 $D(h)$ 的线性子空间全体.

(i) 映射 $S \mapsto S \oplus D(h)$ 是从 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}'$ 的双射;

(ii) 映射 $S \mapsto h^*|_{S\oplus D(h)}$ 是从 $\mathscr{S}$ 到 h 的所有同时是 h^* 的限制的扩张的集合的双射.

(i) 是 8.2.2 的推论, 因为 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 是 $D(h)$ 在 $D(h^*)$ 中的正交补; (ii) 是 (i) 的直接推论.

8.2.5 引理. 沿用 8.2.2 中的记号, 设 $x, x' \in D(h)$, $y, y' \in D_+(h)$, $z, z' \in D_-(h)$. 我们有

$$\{x+y+z, x'+y'+z'\} = 2(y|y') - 2(z|z') = (y|y')_{h^*} - (z|z')_{h^*}.$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\{x+y+z, x'+y'+z'\} = -\mathrm{i}\{y+z, y'+z'\} \quad (\text{根据 } 8.1.6)\\
&= (y+z|h^*(y'+z')) - (h^*(y+z)|y'+z')\\
&= (y+z|\mathrm{i}y' - \mathrm{i}z') - (\mathrm{i}y - \mathrm{i}z|y'+z')\\
&= -\mathrm{i}(y|y') + \mathrm{i}(y|z') - \mathrm{i}(z|y') + \mathrm{i}(z|z') - \mathrm{i}(y|y') - \mathrm{i}(y|z') + \mathrm{i}(z|y') + \mathrm{i}(z|z')\\
&= -2\mathrm{i}(y|y') + 2\mathrm{i}(z|z').
\end{aligned}$$

最后, $(y|y')_{h^*} = (y|y') + (\mathrm{i}y|\mathrm{i}y') = 2(y|y')$. 同理, $(z|z')_{h^*} = 2(z|z')$.

8.2.6 对于 $D(h^*)$ 的任意线性子空间 S, 我们用 S^* 表示它关于 Hermite 形式 $\{\cdot,\cdot\}$ 的正交补. 这个正交补总是包含 $D(\overline{h})$ 的 (8.1.6). 例如, 根据 8.2.5, 当 h 是一个闭对称算子时, 我们有

$$D_+(h)^* = D(h) \oplus D_-(h), \ D_-(h)^* = D(h) \oplus D_+(h).$$

8.2.7 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的对称算子, 算子 k 满足 $h \subset k \subset h^*$, 即 $D(h) \subset D(k) \subset D(h^*)$. 那么 k^* 是 h^* 在 $D(k)^*$ 上的限制.

我们有 $h^* \supset k^* \supset h^{**}$, 因此 $k^* = h^*|_T$, 这里 T 是 $D(h^*)$ 的一个包含 $D(h^{**})$ 的线性子空间. 设 $y \in T$. 对于任意的 $x \in D(k)$, 我们有

$$-\mathrm{i}\{x, y\} = (x|h^*y) - (h^*x|y) = (x|k^*y) - (kx|y) = 0,$$

因此 $y \in D(k)^*$. 反之, 设 $y \in D(k)^* \subset D(h^*)$. 对于任意的 $x \in D(k)$, 我们有

$$0 = -\mathrm{i}\{x, y\} = (x|h^*y) - (h^*x|y) = (x|k^*y) - (kx|y),$$

这样就证明了 $y \in D(k^*) = T$. 所以 $T = D(k)^*$.

8.2.8 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的闭对称算子, 所有从 $D_+(h)$ 的一个线性子空间到 $D_-(h)$ 的一个线性子空间的等距同构全体构成的集合记为 $\mathcal{J}$, 所有从 $D_+(h)$ 到 $D_-(h)$ 的等距同构全体构成的集合记为 $\mathcal{J}'$. 对于任意的 $j \in \mathcal{J}$, 设它的图像为 $G(j)$, 这是 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 的一个线性子空间.

(i) 映射 $j \mapsto h^*|_{D(h)\oplus G(j)}$ 是从 $\mathcal{J}$ 到 h 的全体对称扩张构成的集合的一个双射;

(ii) 映射 $j' \mapsto h^*|_{D(h)\oplus G(j')}$ 是从 $\mathcal{J}'$ 到 h 的全体自共轭扩张构成的集合的一个双射.

考虑下述两个命题:

(i′) 映射 $j \mapsto h^*|_{D(h)\oplus G(j)}$ 是从 $\mathcal{J}$ 到 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 的全体满足 $S \subset S^*$ 的线性子空间 S 构成的集合的一个双射;

(ii′) 映射 $j' \mapsto h^*|_{D(h)\oplus G(j')}$ 是从 $\mathcal{J}'$ 到 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 的全体满足 $S^* = S \cap (D_+(h) \oplus D_-(h))$ 的线性子空间 S 构成的集合的一个双射.

根据 8.1.5, 8.2.4(ii) 和 8.2.7, 我们有 (i)⇔(i′), (ii)⇔(ii′). 从而只要证明 (i′) 和 (ii′) 即可.

(i′) 设 $j \in \mathcal{J}$, $S = G(j) \subset D_+(h) \oplus D_-(h)$. 如果 $y, y' \in D_+(h)$, $z, z' \in D_-(h)$ 满足 $y+z \in S$, $y'+z' \in S$, 那么我们有 $z = jy$, $z' = jy'$, 所以 $(z|z') = (y|y')$, 进而根据 8.2.5, 我们有 $\{y+z, y'+z'\} = 0$. 这就证明了 $S \subset S^*$.

反之, 设 S^* 是 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 的一个满足 $S \subset S^*$ 的线性子空间. 如果 $y \in D_+(h)$, $z \in D_-(h)$ 满足 $y+z \in S$, 那么 $0 = \{y+z, y+z\} = 2\|y\|^2 - 2\|z\|^2$. 这就同时证明了 $S \cap D_-(h) = \{0\}$ (因此, 根据 6.1.9, S 是从 $D_+(h)$ 的一个线性子空间到 $D_-(h)$ 的一个线性子空间的有界算子 j 的图像), 以及 j 是等距同构.

(ii′) 沿用上面的 j 和 S 的记号. 如果 $G(j)$ 不是闭的, 那么就有 $S \neq S^* \cap (D_+(h) \oplus D_-(h))$. 下面假设 $D(j)$ 是闭的. 如果 $D(j) \neq D_+(h)$, 那么存在 $D_+(h)$ 中的非零向量 y 和 $D(j)$ 正交; 由 8.2.5 可知, $y \in S^*$; 但是 $y \notin S$, 所以 $S \neq S^* \cap (D_+(h) \oplus D_-(h))$. 同理, 如果 $\operatorname{Im} j \neq D_-(h)$, 那么存在 $D_-(h)$ 中非零向量 z 和 $\operatorname{Im} j$ 正交; 由 8.2.5 可知 $z \in S^*$; 但是 $z \notin S$, 所以 $S \neq S^* \cap (D_+(h) \oplus D_-(h))$.

最后, 假设 $D(j) = D_+(h)$, $\operatorname{Im} j = D_-(h)$, 我们来证明 $S = S^* \cap (D_+(h) \oplus D_-(h))$, 这样就完成了定理的证明. 根据 (i′), 我们有 $S \subset S^* \cap (D_+(h) \oplus D_-(h))$. 设 $y \in D_+(h)$, $z \in D_-(h)$, 假设它们满足 $y+z \in S^*$. 对于任意的 $y' \in D_+(h)$, 我们有 $y' + jy' \in S$, 因此

$$0 = \{y+z, y'+jy'\} = 2(y|y') - 2(z|jy') = 2(jy - z|jy').$$

所以 $jy - z = 0$, 这样就证明了 $y + z \in S$.

8.2.9 推论. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的对称算子. 为使得 h 有一个自共轭的扩张, 必须且只需它的亏指数相等.

我们很容易把问题归结到闭算子的情形. 为使得 h 有一个自共轭的扩张, 沿用 8.2.8 中的记号, 必须且只需 $\mathcal{J}' \neq \varnothing$, 换句话说, 就是 $D_+(h)$ 和 $D_-(h)$ 具有相同的 Hilbert 维数.

8.2.10 定义. 设 E 是一个 Hilbert 空间. 我们称满足下述条件的 E 到 E 的映射 c 是共轭: 对于任意的 $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 有 $c^2 = 1$, $c(x+y) = cx + cy$, $c(\lambda x) = \overline{\lambda} cx$, $(cx|cy) = (y|x)$.

8.2.11 例. 从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 的映射 $f \mapsto \overline{f}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个共轭.

8.2.12 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的对称算子, c 是 E 中的一个共轭, 且满足 $hc = ch$. 则 h 的亏指数相等, 即 h 有一个自共轭的扩张.

设 $x \in D_+(h)$. 对于任意的 $y \in D(h)$, 我们有

$$(cx|hy) = (chy|c^2x) = (hcy|x) = (cy|h^*x) = (cy|\mathrm{i}x) = (c\mathrm{i}x|y) = (-\mathrm{i}cx|y),$$

从而 $h^*cx = -\mathrm{i}cx$, 即 $cx \in D_-(h)$. 同理可得 $c(D_-(h)) = D_+(h)$. 因此 $c|_{D_+(h)}$ 是从 $D_+(h)$ 到 $D_-(h)$ 的双射. 这样, c 把 $D_+(h)$ 的一组标准正交基映成 $D_-(h)$ 的一组标准正交基. h 的亏指数是相等的, 再应用 8.2.9 即得.

8.2.13 定理. 设 E 是一个 Hilbert 空间, h 是一个 E 中的对称算子, n_+ 和 n_- 分别是 h 的正、负亏指数. 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 设 E_λ 是对应的 h^* 的特征子空间. 如果 $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ (相应地, $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$), 那么 E_λ 的 Hilbert 维数就是 n_+ (相应地, n_-).

我们很容易把问题归结到 h 是一个闭算子的情形. 设 h_1 是 h^* 在 $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 上的限制. 根据 8.2.2, $D_+(h) \oplus D_-(h)$ 关于 $D(h^*)$ 的图像 Hilbert 空间结构是完备的, 所以 h_1 是闭的. 如果 $x \in D(h)$, $z \in D_-(h)$, 那么我们有

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Im}(h_1(x+z)|(x+z)) &= \{x+z, x+z\} \quad (\text{根据 } (2)) \\ &= -2\|z\|^2 \quad (\text{根据 } 8.2.5). \end{aligned}$$

这样, 利用 6.4.6 中的记号, $W(h_1)$ 就包含在半平面 $\mathrm{Im}\,\lambda \leqslant 0$ 中. 另一方面, 根据 8.2.6 和 8.2.7, h_1^* 是 h^* 在 $D(h) \oplus D_+(h)$ 上的限制. 从而我们得到, $W(h^*)$ 包含在半平面 $\mathrm{Im}\,\lambda \geqslant 0$ 中. 根据 6.4.6, $\mathrm{Sp}\,h_1$ 就包含在半平面 $\mathrm{Im}\,\lambda \leqslant 0$ 中. 如果 $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, 我们就可以考虑 $(h_1 - \lambda)^{-1}$, 这是一个以 $D(h_1)$ 为值域的 $\mathcal{L}(E)$ 中的元素. 如果 $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, 且 $\mathrm{Im}\,\lambda' > 0$, 令 $k_{\lambda,\lambda'} = (h_1 - \lambda')(h_1 - \lambda)^{-1}$, 我们有

$$k_{\lambda,\lambda'} = (h_1 - \lambda + \lambda - \lambda')(h_1 - \lambda)^{-1} = 1 + (\lambda - \lambda')(h_1 - \lambda)^{-1}, \tag{3}$$

于是有 $k_{\lambda,\lambda'} \in \mathcal{L}(E)$. 此外, $k_{\lambda,\lambda'}$ 与 $k_{\lambda',\lambda}$ 互为逆映射. 总结一下, $k_{\lambda,\lambda'}$ 是 E 上的一个连续双射, 而且是双连续的.

设 $t \in E_{\lambda'}$. 设 $s = (\lambda - \lambda')(h_1 - \lambda)^{-1}t \in D(h_1) \subset D(h^*)$. 我们有 $(h^* - \lambda)s = (h_1 - \lambda)s = (\lambda - \lambda')(h_1 - \lambda)(h_1 - \lambda)^{-1}t = (\lambda - \lambda')t$. 另一方面, 根据 (3), 我们知道 $k_{\lambda,\lambda'}t = t + s \in D(h^*)$, 而且

$$(h^* - t)k_{\lambda,\lambda'}t = (h^* - t)(t + s) = h^*t = \lambda t + (h^* - \lambda)s = \lambda' t - \lambda t + (\lambda - \lambda')t = 0.$$

所以 $k_{\lambda,\lambda'}(E_{\lambda'}) \subset E_\lambda$. 同理, 我们有 $k_{\lambda',\lambda}(E_\lambda) \subset E_{\lambda'}$. 因此 $k_{\lambda,\lambda'}|_{E_{\lambda'}}$ 是从 $E_{\lambda'}$ 到 E_λ 的双连续双射. 根据 5.2.5, E_λ 和 $E_{\lambda'}$ 具有相同的 Hilbert 维数. 取 $\lambda' = \mathrm{i}$, 我们得到, E_λ 的 Hilbert 维数是 n_+. 同理可证关于 n_- 的结论.

8.3 在矩问题上的应用

8.3.1 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个正测度, 使得对于任意的整数 $n\geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^n\mathrm{d}\mu(t)<+\infty$. 我们称 $\int_{-\infty}^{+\infty}t^n\mathrm{d}\mu(t)<+\infty$ 为 μ 的 n **阶矩**.

8.3.2 定理. 设 $(m_0,m_1,m_2,\cdots)$ 是一列实数. 下述条件是等价的:

(i) 存在 $\mathbb{R}$ 上的一个正测度 μ, 使得对于任意的整数 $n\geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^n\mathrm{d}\mu(t)<+\infty$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}t^n\mathrm{d}\mu(t)=m_n$;

(ii) 对于任意一组有限的复数 $(\alpha_0,\cdots,\alpha_n)$, 我们有 $\sum\limits_{i,j=0}^{n}m_{i+j}\alpha_i\overline{\alpha_j}\geqslant 0$.

(i)⇒(ii): 假设条件 (i) 满足. 设 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C}$. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=0}^{n}m_{i+j}\alpha_i\overline{\alpha_j}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{n}t^{i+j}\alpha_i\overline{\alpha_j}\right)\mathrm{d}\mu(t)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}t^i\alpha_i\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{n}t^j\alpha_j\right)}\mathrm{d}\mu(t)\geqslant 0.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i): 假设条件 (ii) 满足. 设 A 是所有使得当 n 充分大时 $\alpha_n=0$ 的无限复数列 $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 全体构成的集合. 对于 $x=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in A$ 和 $y=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots)\in A$, 我们定义

$$(x|y)=\sum_{i,j=0}^{n}m_{i+j}\alpha_i\overline{\beta_j}.$$

很明显地, $(\cdot|\cdot)$ 是一个半双线性型, 且根据 1.2.5, 条件 (ii) 表明它是正定 Hermite 型. 因此 A 是一个准 Hilbert 空间. 设 A_0 是由对于所有的 $x'\in A$ 都成立 $(x|x')=0$ 的全体 $x\in A$ 构成的集合. 那么 $B=A/A_0$ 就以一种典范的方式成为一个内积空间 (1.4.5). 设 C 是对 B 做完备化后得到的 Hilbert 空间 (1.10.3). 对于 $x=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in A$, 令 $hx=(0,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in A$. 这样我们就定义了 A 上的一个有界算子 h. 如果 $y=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots)\in A$, 我们有

$$\begin{aligned}(hx|y)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}m_{i+j}\alpha_{i-1}\overline{\beta_j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}m_{i+j+1}\alpha_i\overline{\beta_j}\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}m_{i+j}\alpha_{i-1}\overline{\beta_{j-1}}=(x|hy).\end{aligned}\tag{4}$$

特别地, 对于 $x \in A_0$ 以及任意的 $y \in A$, 我们有 $(hx|y) = (x|hy) = 0$, 因此 $hx \in A_0$. 通过取商的过程, 我们可以从 h 得到 B 上的连续线性算子 k. 由关系式 (4), 可知对于任意的 $x, y \in B$,

$$(kx|y) = (x|ky). \tag{5}$$

我们可以把 k 看成是 C 上满足 $D(k) = B$ 的算子. 根据 (5), k 是对称算子.

设 a 是从 A 到 A 的映射 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots) \mapsto (\overline{\alpha_0}, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \cdots)$. 对于任意的 x, $y \in A$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有 $a^2 = 1$, $a(x+y) = ax + ay$, $a(\lambda x) = \overline{\lambda} ax$, $(ax|ay) = (y|x)$. 特别地, 当 $x \in A_0$ 时, 对于任意的 $y \in A$, 我们有 $(ax|y) = \overline{(x|ay)} = 0$, 从而 $ax \in A_0$. 取商之后我们得到一个从 B 到 B 的映射, 记为 b. 对于任意的 x, $y \in B$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有 $b^2 = 1$, $b(x+y) = bx + by$, $b(\lambda x) = \overline{\lambda} bx$, $(bx|by) = (y|x)$. 特别对于任意的 $x \in B$, $\|bx\| = \|x\|$, 我们容易得出 b 能够以唯一的方式扩张成一个从 C 到 C 的连续映射 c, 且 c 是 C 上的共轭.

我们马上可以得到 $ua = au$, 因此 $vb = bv$ 且 $vc = cv$. 根据 8.2.12, k 有一个自共轭扩张 l. 设 $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 是和 l 关联的恒等映射的分解.

设 $x_0 = (1, 0, 0, 0, \cdots) \in A$. 我们有 $h^n x_0 = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$, 其中 1 在第 $(n+1)$ 个位置上, 因此 $(h^n x_0|x_0) = m_n$. 设 y_0 是 x_0 在 B 中的典则像. 对于任意的 n, 我们有 $k^n y_0 \in B$. 因此对于任意的 n, $y_0 \in D(l^n)$. 但是根据 7.3.5, $l^n \subset \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{d}p_\lambda$. 所以对于任意的 n, 由 7.2.2(i) 可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2n} \mathrm{d}(p_\lambda y_0|y_0) < +\infty.$$

另一方面, 根据 7.2.2(ii),

$$m_n = (h^n x_0|x_0) = (k^n y_0|y_0) = (l^n y_0|y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{d}(p_\lambda y_0|y_0) < +\infty.$$

从而测度 $\mathrm{d}(p_\lambda y_0|y_0)$ 具有条件 (i) 中的性质.

8.3.3 当给定了一列满足 8.3.2(ii) 中条件的 $(m_0, m_1, m_2, \cdots)$ 时, 由上述结果给出存在性的 μ 并不总是唯一的. 这和上面提到的对称算子 k 的亏指数有关. 对于这个问题, 我们不做深入讨论.

8.4 对一些微分算子的应用

8.4.1 设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间. 我们称 Δ 是**左** (相应地, **右**) **侧紧的**, 如果 Δ 的左 (相应地, 右) 端点是有限的, 且属于 Δ.

8.4.2　设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间, f 是 Δ 上的一个复值函数. 我们称 f **在 Δ 上可导**, 如果: 1) f 在 Δ 内部按照通常的意义可导; 2) 当 Δ 是左 (相应地, 右) 侧紧时, f 在 Δ 的左 (相应地, 右) 端点 a 具有 (有限的) 右 (相应地, 左) 导数.

我们自然地有 Δ 上 n 次可导, 以及任意次可导函数的定义.

8.4.3　设 Δ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间, f 和 g 是 Δ 上复值函数, f 是连续的, g 是局部可积的. 我们知道下述条件是等价的:

(i) $f(b)-f(a)=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$;

(ii) 对于每一个任意次可导, 且具有包含在 Δ 内部的紧支撑集的函数 φ, 都成立

$$\int_\Delta f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=-\int_\Delta g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

当这些条件满足时, 我们称 g 是 f **在分布意义下的导函数**, 记作 $g=f'$. (当 f' 存在时) f 在相差一个零测集的意义下唯一决定 f'. 如果 f 按照 8.4.2 的意义有一个导函数, 且这个导函数是局部可积的, 那么这个通常意义下的导函数也就是分布意义下的导函数, 这就说明了这个定义和记号的来源.

如果 f_1 和 f_2 是 Δ 上的两个连续函数, 且都有分布意义下的导函数. 对于任意的 $a,b\in\Delta$, 我们有

$$\int_a^b f_1(t)f_2'(t)\mathrm{d}t=f_1(b)f_2(b)-f_1(a)f_2(a)-\int_a^b f_1'(t)f_2(t)\mathrm{d}t.$$

8.4.4　在下文中, 我们固定 $\mathbb{R}$ 中的一个至少包含两个点的区间 Δ, 以及 Δ 上一个任意次可导的实值函数 q. 我们来研究微分算子 $\tau=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+q$ (我们暂时完全形式地来看这个表达式).

设 A 是 Δ 上具有下述性质的复值函数全体:

1) f 在 Δ 上可导;

2) f' 在 Δ 上有分布意义下的导函数 (我们记之为 f'').

如果 $f\in A$, 那么 $f''+qf$ 是 Δ 上的一个局部可积的函数, 且在一个零测集之外是唯一确定的, 记为 τf. A 中的函数, 就是按照某种合理的意义, "可以把 τ 作用上去的" 那些函数. 但是, 因为我们想要在 Hilbert 空间的框架下研究 τ, 所以将引进一个比 A 要起到更大作用的函数类: 我们用 D_τ, 或者就是 D, 来表示所有使得 $f\in L^2(\Delta)$, 且 $\tau f\in L^2(\Delta)$ 的 $f\in A$ 构成的集合. 我们用 v_τ, 或者就是 v, 来表示从 D 到 $L^2(\Delta)$ 的映射 $f\mapsto\tau f$. 这样, v **是 $L^2(\Delta)$ 中一个以 D 为定义域的算子**, 对于 $f\in D$, 有

$$vf=f''+qf.$$

我们就是要来研究 v.

8.4.5 如果 $f, g \in A$, 且 $t \in \Delta$, 我们令

$$F_t(f,g) = f'(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{g'(t)}.$$

8.4.6 定理 (Green 公式). 设 $f, g \in D$, $a, b \in \Delta$, 我们有

$$\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\overline{(\tau g)(t)}\mathrm{d}t + F_b(f,g) - F_a(f,g).$$

事实上,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b f''(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t + \int_a^b q(t)f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t\\
&= f'(b)\overline{g(b)} - f'(a)\overline{g(a)} - \int_a^b f'(t)\overline{g'(t)}\mathrm{d}t + \int_a^b q(t)f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t \quad (\text{根据 } 8.4.3)\\
&= f'(b)\overline{g(b)} - f'(a)\overline{g(a)} - f(b)\overline{g'(b)} + f(a)\overline{g'(a)}\\
&\quad + \int_a^b f(t)\overline{g''(t)}\mathrm{d}t + \int_a^b q(t)f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t \quad (\text{根据 } 8.4.3)\\
&= F_b(f,g) - F_a(f,g) + \int_a^b f(t)\overline{(\tau g)(t)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

8.4.7 我们来回顾一下微分方程的古典理论中的下述结果: 设 $t_0 \in \Delta$, g 是 Δ 上的一个局部可积的复值函数, c_0 和 c_1 是复数. 存在唯一的 $f \in A$, 使得 $f(t_0) = c_0$, $f'(t_0) = c_1$, 并且 $f'' + qf = g$ (几乎处处成立). 如果 g 在 Δ 上是 k 次连续可导的, 那么 f 在 Δ 上是 $k+2$ 次连续可导的. (所有这些在 q 取复值的时候也成立.)

8.4.8 考虑所有具有包含在 Δ 中的紧支撑集, 并且 $f'' \in L^2(\Delta)$ 的函数 $f \in A$ 全体构成的集合 D_0. 如果 $f \in D_0$, 那么 f 和 qf 都有紧支撑集, 且 $f'' \in L^2(\Delta)$, 因此 $f \in L^2(\Delta)$, 且 $\tau f \in L^2(\Delta)$. 所以 $D_0 \subset D$. 因为 D_0 包含了所有具有包含在 Δ 中的紧支撑集的 2 次连续可导的函数全体, 所以 D_0 在 $L^2(\Delta)$ 中是稠密的.

8.4.9 引理. *设 E 是一个 Hilbert 空间, F 是 E 的一个闭线性子空间, 使得 $F^\perp$ 是有限维的, E' 是 E 的一个稠密线性子空间. 那么 $E' \cap F$ 在 F 中稠密.*

设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $F^\perp$ 的一组标准正交基, 并设 F_p 是 $\mathbb{C}x_1 + \cdots + \mathbb{C}x_p$ 在 E 中的正交补. 如果我们能够证明 $E' \cap F_1$ 在 F_1 中稠密, 那么反复应用这个结论, 就可以得到 $E' \cap F_2$ 在 F_2 中稠密, $\cdots$, $E' \cap F_n$ 在 F_n 中稠密. 这样就能得到我们想要的证明.

所以我们不妨假设 $F\perp = \mathbb{C}x_1$. 存在 $y_1 \in E'$, 使得 $y_1 \notin F$; 在乘上一个适当的数后, 可以假设 $(y_1|x_1) = 1$. 对于任意的 $x \in E$, 我们有 $x - (x|x_1)y_1 \in F$, 这是因为

$$(x - (x|x_1)y_1|x_1) = (x|x_1) - (x|x_1)(y_1|x_1) = 0.$$

下面我们用反证法, 假设存在 F 上的一个连续线性泛函 $f \neq 0$, 在 $F' \cap F$ 上取值为 0. 对于任意 $x \in E$, 令 $g(x) = f(x - (x|x_1)y_1)$. 那么 g 就是 E 上的一个连续线性泛函. 我们有 $g|_F = f$, 因而 $g \neq 0$. 如果 $x \in E'$, 那么我们有 $x - (x|x_1)y_1 \in E' \cap F$, 所以 $g(x) = f(x - (x|x_1)y_1) = 0$. 因为 $\overline{E'} = E$, 我们得到 $g = 0$. 这就导致矛盾.

8.4.10 引理. 设 f 是 Δ 上的一个复值函数, 局部平方可积. 我们假设对于任意的 $g \in D_0$, 都有 $\int_\Delta f(t)(\tau g)(t)\mathrm{d}t = 0$. 那么, (在一个零测集上改变 f 的取值以后) f 是任意次可求导的, 且 $\tau f = 0$.

a) 假设引理对于 Δ 紧致的时候成立, 我们来证明一般情况. 对于 Δ 的任何紧子区间 Δ', 我们知道, 把 Δ 换成 Δ', $f_1 = f|_{\Delta'}$ 就满足引理的假设. 所以在一个零测集上改变 f_1 的取值之后, f_1 就是任意次可导的, 而且 $f_1'' + qf_1 = 0$. 这样只要把 Δ 写成一列递增的紧子区间的并集, 我们就可以得到 f 满足引理的结论.

所以我们在下面假设 $\Delta = [a, b]$ 是紧的, 这样 $f \in L^2(\Delta)$.

b) 设 S 是由全体满足 $h'' + qh = 0$ 的 $h \in A$ 构成的集合. 根据 8.4.7, S 中的函数在 Δ 上是任意次可导的, 从而因为 Δ 是紧的, 所以 $S \subset L^2(\Delta)$. 根据 8.4.7, S 是 $L^2(\Delta)$ 中一个 2 维的线性子空间, 从而它在 $L^2(\Delta)$ 中是闭的 (1.5.10). 于是我们就要证明 $f \in S$. 由 8.4.9, 只要证明 f 和 $S^\perp \cap D_0$ 正交即可.

c) 设 $k \in S^\perp \cap D_0$. 根据 8.4.7, 存在 Δ 上 2 次连续可导的函数 l, 使得 $\tau l = k$, $l(a) = l'(a) = 0$. 对于任意的 $s \in S$, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b l(t)\overline{(\tau s)(t)}\mathrm{d}t \quad (\text{因为 } \tau s = 0) \\
&= \int_a^b (\tau l)(t)\overline{s(t)}\mathrm{d}t + \overline{F_b(s,l)} - \overline{F_a(s,l)} \quad (\text{根据 } 8.4.6) \\
&= \overline{F_b(s,l)} \quad (\text{因为 } \tau l \in S^\perp, \text{ 且 } l(a) = l'(a) = 0) \\
&= \overline{s'(b)}l(b) - \overline{s(b)}l'(b).
\end{aligned}$$

但是当 s 取遍 S 时, $s(b)$ 和 $s'(b)$ 可以取遍任意的值. 所以 $l(b) = l'(b) = 0$.

另一方面, 对于某个 $\varepsilon > 0$, k 在区间 $[a, a+\varepsilon]$ 和 $[b-\varepsilon, b]$ 中取值为 0. 在区间 $[a, a+\varepsilon]$ 上, 条件 $l'' + ql = 0$, $l(a) = l'(a) = 0$ 推出 $l = 0$ (8.4.7). 同理, l 在 $[b-\varepsilon, b]$ 中取值也为 0. 这样 $\bar{l} \in D_0$. 由引理的假设, 我们知道

$$0 = \int_\Delta f(t)\overline{(\tau l)(t)}\mathrm{d}t = \int_\Delta f(t)\overline{k(t)}\mathrm{d}t.$$

8.4.11 定理. 设 $u = v|_{D_0}$. 则算子 u 是对称算子, 且 $u^* = v$.

我们已经注意到 (8.4.8) D_0 在 $L^2(\Delta)$ 中是稠密的. 设 $f \in D_0$, $g \in D$. 存在 Δ

内部包含 f 的支撑集的紧子区间 $[a,b]$. 我们有

$$\begin{aligned}(uf|g) &= \int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)\overline{(\tau g)(t)}\mathrm{d}t \quad (\text{根据 8.4.6, 因为 } f \text{ 和 } f' \text{ 在 } a \text{ 和 } b \text{ 处取值都是 } 0) \\ &= (f|vg).\end{aligned}$$

所以 $v \subset u^*$. 因为 $u \subset v$, 我们得到 u 是一个对称算子. 下面只需证明 $D(u^*) \subset D$ 即可. 设 $h \in D(u^*) \subset L^2(\Delta)$. 存在 $k \in L^2(\Delta)$, 使得对于任意的 $g \in D_0$, 成立

$$\int_\Delta h(t)\overline{(\tau g)(t)}\mathrm{d}t = \int_\Delta k(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

根据 8.4.7, 存在 $k_0 \in A$, 使得 $\tau k_0 = k$. 对于任意的 $g \in D_0$, 根据 8.4.6 (我们取包含 g 的支撑集的 $[a,b]$), 有

$$\int_\Delta k_0(t)\overline{(\tau g)(t)}\mathrm{d}t = \int_\Delta k(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

于是我们得到, 对于任意的 $g \in D_0$, 有

$$\int_\Delta (h(t) - k_0(t))\overline{(\tau g)(t)}\mathrm{d}t = 0.$$

根据 8.4.10, $h - k_0 \in A$, 且 $\tau(h - k_0) = 0$. 这样 $h \in A$, 且 $\tau h = \tau k_0 = k \in L^2(\Delta)$, 所以 $h \in D$.

8.4.12 推论. 算子 v 是一个闭算子.

这一点由 8.4.11 和 6.3.4 即可得到.

8.4.13 定理. (i) u 的正、负亏指数相等, 都是 $n \leqslant 2$;

(ii) 如果 $n = 1$ 或 2, 那么 u 有无穷多个自共轭扩张, 算子 v 不是自共轭的;

(iii) 如果 $n = 0$, 那么我们有 $\overline{u} = v$, v 是 u 的唯一的自共轭扩张;

(iv) 如果 Δ 是紧的, 那么 $n = 2$;

(v) 如果 Δ 是左或右侧紧的, 那么 $n = 1$ 或 2.

(i) 从 $L^2(\Delta)$ 到 $L^2(\Delta)$ 的映射 $f \mapsto \overline{f}$ 是一个共轭, 记作 c. 很容易验证 $cu = uc$. 从而 u 的正、负亏指数相同, 等于同一个基数 n (8.2.12).

设 T 是所有满足 $f'' + (q - \mathrm{i})f = 0$ 的 $f \in A$ 构成的集合. 那么 T 是 A 的一个 2 维线性子空间 (8.4.7). 然而根据 8.4.11, 我们有 $D_+(u) = T \cap L^2(\Delta)$. 所以 $n \leqslant 2$.

(ii) 和 (iii) 这是 8.2.8 的推论.

(iv) 如果 Δ 是紧的, 我们有 $T \subset L^2(\Delta)$, 所以 $D_+(u) = T$, 这样 $n = 2$.

(v) 我们不妨假设 Δ 是左侧紧的, 并记其左端点为 a. 设 φ 和 ψ 分别是 D 到 $\mathbb{C}$ 中的映射 $f \mapsto f(a)$ 和 $f \mapsto f'(a)$. 这是 D 上的线性泛函. 存在 Δ 上的一个任意次可

导且具有紧支撑集的函数 f (相应地, g), 使得 $f(a)=1$, $f'(a)=0$ (相应地, $g(a)=0$, $g'(a)=1$); 这样 $f\in D$, $g\in D$, $\varphi(f)=1$, $\varphi(g)=0$, $\psi(f)=0$, $\psi(g)=1$. 这就证明了 φ 和 ψ 是线性独立的.

现在在 $D=D(v)=D(u^*)$ 上加上图像 Hilbert 空间结构. 那么 φ 和 ψ 是连续的. 事实上, 设 D 中序列 (f_n) 满足

$$\int_\Delta (|f_n(t)|^2+|(\tau f_n)(t)|^2)\mathrm{d}t\to 0.$$

这样 f_n 和 τf_n 在 Δ 上依平方平均收敛到 0. 设 $b\in\Delta$, 那么 qf_n 在 $[a,b]$ 上依平方平均收敛到 0, 所以 $f_n''=\tau f_n-qf_n$ 在 $[a,b]$ 上也依平方平均收敛到 0. 而对于 $x\in[a,b]$, 我们有

$$|f_n'(x)-f_n'(a)|=\left|\int_a^x f_n''(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_a^b|f_n''(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

因此 $f_n'(x)-f_n'(a)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 0, 所以函数 $x\mapsto f_n(x)-f_n'(a)(x-a)-f_n(a)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 0. 但是 $\int_\Delta |f_n(t)|^2\mathrm{d}t\to 0$, 所以线性函数 $x\mapsto f_n'(a)(x-a)+f_n(a)$ 在 $[a,b]$ 上依平方平均收敛到 0. 通过一个初等运算可以知道 $f_n(a)\to 0$, $f_n'(a)\to 0$, 由此即得 φ 和 ψ 的连续性.

我们知道 φ 和 ψ 在 $D_0=D(u)$ 上取值为 0, 所以 φ 和 ψ 在 $D(\overline{u})$ 上取值也为 0, 因为 $D(\overline{u})$ 是 $D(u)$ 关于 $D(u^*)$ 上的图像 Hilbert 空间结构的闭包. 而根据 8.2.2, $D(u^*)=D(\overline{u})\oplus D_+(u)\oplus D_-(u)$. 从而在 $D_+(u)\oplus D_-(u)$ 上存在着两个线性独立的线性泛函. 这就推出

$$2\leqslant\dim(D_+(u)\oplus D_-(u))=2n.$$

8.4.14　推论. *设 Δ 是左或右侧紧的. 对于任意虚数 λ, 微分方程 $f''+(q-\lambda)f=0$ 至少有一个在 Δ 上平方可积的解.*

事实上, 根据 8.4.13, $n\geqslant 1$. 根据 8.2.13, 对于任意非实数的 $\lambda\in\mathbb{C}$, λ 是 $u^*=v$ 的重数为 n 的特征值.

8.4.15　在下文中 (除了 8.4.18 以外), **我们都假设 Δ 是紧的**, 也就是说具有形式 $[a,b]$. 我们选定满足条件 $(h_1,k_1)\neq(0,0)$, $(h_2,k_2)\neq(0,0)$ 的实数 h_1, k_1, h_2, k_2. 设 D' 是所有满足下述**边界条件**的 $f\in D$ 构成的集合:

$$h_1f(a)+k_1f'(a)=0,\quad h_2f(a)+k_2f'(a)=0. \tag{6}$$

显然我们有 $D'\supset D_0$. 设 $w=v|_{D'}$. 我们有 $u\subset w\subset v$. 我们称 w 是由 τ 和边界条件 (6) 定义的 Sturm-Liouville **算子**.

8.4.16 定理. *w* 是自共轭算子.

根据 8.4.13(v) 中的理由, $D(v)$ 上的线性泛函 $f \mapsto h_1 f(a) + k_1 f'(a)$ 和 $f \mapsto h_2 f(a) + k_2 f'(a)$ 关于图像 Hilbert 空间结构是连续的, 因此对于这个结构, D' 是闭的. 因此, D' 是 $D(\overline{u})$ 与 $D_+(u) \oplus D_-(u)$ 的一个线性子空间 D'' 的直和. 我们有 $\dim(D_+(u) \oplus D_-(u)) = 4$, 且 D'' 是由 $D_+(u) \oplus D_-(u)$ 上的两个线性泛函同时取值为 0 来定义的, 所以 $\dim D'' \geqslant 2$. 利用 8.2.6 中的记号, D'^* 是 $D(\overline{u})$ 与 $D_+(u) \oplus D_-(u)$ 中 D'' 关于二次型 $\{\cdot, \cdot\}$ 的正交补 P 的直和. 因为这个二次型在 $D_+(u) \oplus D_-(u)$ 上是非退化的, 所以这个正交补的维数 $\leqslant 4 - 2 = 2$. 但是对于 $f, g \in D'$, 我们有 $F_a(f,g) = F_b(f,g) = 0$. 于是 Green 公式表明 w 是对称算子. 根据 8.2.7, $D' \subset D'^*$, 所以 $D'' \subset P$. 因为维数的关系, 我们知道 $D'' = P$, 所以 $D' = D'^*$, 且 w 是自共轭算子 (8.2.7).

8.4.17 定理. *w* 是由 τ 和边界条件 (6) 定义的Sturm-Liouville 算子. 设 $D' = D(w)$.

(i) w 的谱是一列实数 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$, 满足 $\displaystyle\sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i^2} < +\infty$;

(ii) 设 λ 是一个和所有 λ_i 都不同的复数, 对于任意的 $g \in L^2(\Delta)$, 方程 $f'' + qf - \lambda f = 0$ 在 D' 中有唯一解;

(iii) 对于 $i = 1, 2, \cdots$, 存在 $[a, b]$ 上的一个任意次可微的实值函数 f_i, 满足边界条件 (6), $f_i'' + qf_i = \lambda_i f_i$, 且 $\displaystyle\int_a^b f_i(t)^2 \mathrm{d}t = 1$, 任意满足 $f'' + qf = \lambda_i f$ 的 $f \in D'$ 都和 f_i 成正比;

(iv) 函数序列 $(f_1, f_2, \cdots)$ 是 $L^2(\Delta)$ 的一组标准正交基;

(v) 如果 $f \in D'$, 那么展开式 $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (f|f_i) f_i$ 在 Δ 上一致且绝对收敛.

a) 选择 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $w - \lambda$ 是单射. (比如说, 根据 8.4.16, $\operatorname{Sp} w \subset \mathbb{R}$, 这样如果 $\lambda \notin \mathbb{R}$, 我们就知道 $w - \lambda$ 是单射.) 根据 8.4.7, 存在 $[a, b]$ 上不恒等于 0 且任意次可导的复值函数 u_1 (相应地, u_2), 满足 $(\tau - \lambda)u_1 = 0$, 且 $h_1 u_1(a) + k_1 u_1'(a) = 0$ (相应地, $(\tau - \lambda)u_2 = 0$, 且 $h_2 u_2(a) + k_2 u_2'(a) = 0$). 这两个函数不成正比, 否则的话, 我们就有 $\mathbb{C}u_1 = \mathbb{C}u_2 \subset D'$, 这样 $w\lambda$ 就不会是单射. 因此在 $[a, b]$ 上, 方程 $(\tau - \lambda)f = 0$ 的所有解都是 u_1 和 u_2 的线性组合. 函数 $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ (u_1 和 u_2 的 Wronsky 行列式) 的导数就是

$$u_1' u_2' + u_1 u_2'' - u_2' u_1' - u_2 u_1'' = u_1(\lambda - q)u_2 - u_2(\lambda - q)u_1 = 0,$$

从而就等于某个常数 d. 如果 $d = 0$, 那么对于方程 $(\tau - \lambda)f = 0$ 在 $[a, b]$ 上的任意解 v_1, v_2, 都有 $v_1 v_2' - v_2 v_1' = 0$; 但这是不可能的, 因为我们可以在 $[a, b]$ 中的一点处任

意指定方程的解和它的导函数的数值. 因此 $d \neq 0$. 对于 $a \leqslant t \leqslant s \leqslant b$, 令

$$K(s,t) = \frac{u_2(s)u_1(t)}{d};$$

对于 $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$, 令

$$K(s,t) = \frac{u_1(s)u_2(t)}{d}$$

(上述定义对于 $a \leqslant s = t \leqslant b$ 的情形是相同的).

显然, K 是 $[a,b] \times [a,b]$ 上的连续复值函数, 且对于任意的 $s, t \in [a,b]$,

$$K(t,s) = \overline{K(s,t)}. \tag{7}$$

b) 根据 4.2.9, 函数 K 定义了 $L(\Delta)$ 上的一个 Hilbert-Schmidt 算子 w'. 设 C 是 Δ 上全体复值连续函数. 它是 $L^2(\Delta)$ 的一个稠密线性子空间. 设 $f \in C$, $g = w'f$. 我们有

$$g(t) = \int_a^b K(s,t)f(s)\mathrm{d}s = \frac{u_2(t)}{d}\int_a^t u_1(s)f(s)\mathrm{d}s + \frac{u_1(t)}{d}\int_t^b u_2(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

我们看到 g 在 Δ 上是连续可导的, 且

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{u_2'(t)}{d}\int_a^t u_1(s)f(s)\mathrm{d}s + \frac{u_2(t)}{d}u_1(t)f(t) \\ &\quad + \frac{u_1'(t)}{d}\int_t^b u_2(s)f(s)\mathrm{d}s - \frac{u_1(t)}{d}u_2(t)f(t) \\ &= \frac{u_2'(t)}{d}\int_a^t u_1(s)f(s)\mathrm{d}s + \frac{u_1'(t)}{d}\int_t^b u_2(s)f(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

这样函数 g' 也在 Δ 上连续可微, 而且我们有

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{u_2''(t)}{d}\int_a^t u_1(s)f(s)\mathrm{d}s + \frac{u_2'(t)}{d}u_1(t)f(t) \\ &\quad + \frac{u_1''(t)}{d}\int_t^b u_2(s)f(s)\mathrm{d}s - \frac{u_1'(t)}{d}u_2(t)f(t) \\ &= \frac{1}{d}(\lambda - q(t))u_2(t)\int_a^t u_1(s)f(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{d}(\lambda - q(t))u_1(t)\int_t^b u_2(s)f(s)\mathrm{d}s + f(t) \\ &= (\lambda - q(t))g(t) + f(t). \end{aligned}$$

所以 $(\tau - \lambda)g = f$. 此外,

$$h_1 g(a) + k_1 g'(a) = \frac{h_1 u_1(a) + k_1 u_1'(a)}{d}\int_a^b u_2(s)f(s)\mathrm{d}s = 0,$$

$$h_2g(b)+k_2g'(b)=\frac{h_2u_2(b)+k_2u_2'(b)}{d}\int_a^b u_1(s)f(s)\mathrm{d}s=0.$$

所以 $g\in D'$, 且 $(w-\lambda)g=f$.

c) 沿用上文的记号, 这样我们就证明了 $f\in D((w-\lambda)^{-1})$, 且 $(w-\lambda)^{-1}f=g=w'f$. 所以 $w'|_C\subset(w-\lambda)^{-1}$. 而根据 8.4.16 和 6.3.5, $(w-\lambda)^{-1}$ 是闭的, 这样定理 6.3.12 就推出 $w'\subset(w-\lambda)^{-1}$. 但是 $D(w')=L^2(\Delta)$, 所以 $w'=(w-\lambda)^{-1}$. 根据 6.2.5 和 8.4.16, 我们有 $w'^*=(w^*-\lambda)^{-1}=(w-\lambda)^{-1}$. 由 6.4.7, 我们知道 w' 和 w^* 是可交换的. 这样, w' 是一个正规的 Hilbert-Schmidt 算子. 它的谱是可数的 (4.3.3 和 4.3.5). 所以 $w=(w')^{-1}+\lambda$ 的谱是可数的. 特别地, 在 a) 开头选取的 λ 可以是实数. 下面我们就假设这一点.

d) 现在我们可以选取实值的函数 u_1, u_2, 这样 K 也是实值的. 由 (7) 可知, w' 是一个对称算子.

w' 的谱集由不是特征值的 0 和一列非零的实数 $(\mu_1,\mu_2,\cdots)$ 组成, 且 $\sum\limits_i|\mu_i|^2<+\infty$ (4.4.2(i) 和 (ii)). $w=(w')^{-1}+\lambda$ 的谱集由特征值 $\lambda_i=\mu_i^{-1}+\lambda$ 构成. 当 $i\to+\infty$ 时, $\mu_i^{-1}+\lambda\sim\mu_i^{-1}$, 所以我们有 $\lambda_i^{-1}\sim\mu_i$, 由此即得 $\sum\limits_i\lambda_i^{-2}<+\infty$. 这样就证明了 (i).

如果 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和所有的 λ_i 均不相同, 那么就有 $\lambda\notin\operatorname{Sp}w$, 这样 (ii) 就是显然的.

如果 λ_i 是重数大于 1 的特征值, 设 f 和 g 是相应的不成正比的 w 的两个特征向量. $(\tau-\lambda_i)h=0$ 在 Δ 中的任意解 h 都是 f 和 g 的线性组合. 而我们对于 $h(a)$ 和 $h'(a)$ 的任意取值都能够找到对应的 h, 而这是不可能的, 因为 f 和 g 满足边界条件 (6). 从而 λ_i 的重数是 1. 另一方面, 如果 $f\in D'$ 满足 $f''+qf=\lambda_if$, f 的实部和虚部也都属于 D', 且满足同一个方程. 这样我们就证明了 (iii).

结论 (iv) 是 4.4.2(iii) 的推论.

如果 $f\in D'$, 我们已经看到, f 属于 w' 的像; 命题 (v) 就可以由 4.4.4(iii) 得到.

8.4.18 如果 Δ 不是紧的, 那么 v 的一个自共轭限制的谱就可能表现出和 Sturm-Liouville 算子的谱完全不同的性质. 例如, 假设 $\Delta=\mathbb{R}$, 且 $q=0$. 那么做一次 Fourier 变换就可以把关于 v 的研究转化为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子 $f(\lambda)\mapsto-\lambda^2f(\lambda)$ 的研究. 从而我们知道, v 是自共轭的, 它的谱是连续的, 且等于 $(-\infty,0]$.

参考文献

初等读物[1]

[Be] S. Berberian. *Introduction to Hilbert Space*. New York: Oxford University Press, 1961.

[B] N. Bourbaki. *Espaces Vectoriels Topologiques*. Chap. 5. Paris: Hermann, 1973. [2]

和本书基本处于同一水平的著作

[RN] F. Riesz, B. Sz. Nagy. *Leçons d'analyse Fonctionnelle*. Paris: Gauthier-Villars, 1965. [3]

[Ha] P. Halmos. *Introduction to Hilbert Spaces and the Theory of Spectral Multiplicity*. New York: Chelsea Pub. Co., 1951.

[D] J. Dieudonné. *Eléments d'analyse*. Paris: Gauthier-Villars, 1982.

[T] 童裕孙. *泛函分析教程*. 上海: 复旦大学出版社, 2008.

[X] 夏道行, 严绍宗, 吴卓人, 舒五昌. *实变函数论与泛函分析*. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

补充文献

[DS] N. Dunford, J. Schwartz. *Linear Operators*. New York: Wiley, 1971.

[Y] K. Yosida. *Functional Analysis*. Berlin: Springer, 1965.

[Ka] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. New York: Springer, 1976.

[S] M. Stone. *Linear Transformations in Hilbert Space*. Amer. Math. Soc., 1990.

[N] M. Naimark. *Normed Rings*. Groningen: Noordhoff, 1964.

[LP] P. D. Lax, R. S. Phillips. *Scattering Theory*. Academic Press, 1967.

[P] C. Putnam. *Commutation Properties of Hilbert Space Operators*. Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 1967.

[M] K. Maurin. *Methods of Hilbert Space*. Polish Scientific Publishers, 1972.

---

[1] 原讲义中只列出了书名和出版社, 现根据目前通行的惯例加以补充.

[2] 此书的英文版国内曾影印过.

[3] 有中译本.

主要记号

译后记

Jacques Dixmier, 法国数学家, Bourbaki 学派的重要成员. 他不仅自己在李群、李代数、算子代数等方面都有很杰出的贡献, 也培养出了诸如 Alain Connes, Michèle Vergne, Michel Duflo 等非常优秀的学生.

1955 年, 他进入巴黎大学成为数学教授. 在第二次世界大战结束后的二十多年中, H. Cartan, L. Schwartz, G. Choquet, J. Dixmier 等数学家成功地将法国的高等数学教育的现代化的程度大大提高.

本书是他在 20 世纪六七十年代为巴黎大学 (后来巴黎大学一拆十三之后的巴黎第六大学) 学生讲授线性算子谱理论时所用的讲义, 在法国从未正式出版. Dixmier 是一个对于书写非常重视的人, 他的学生们在写作博士论文期间无不被他对于书写的严格要求 "折磨" 得苦不堪言, 有几位甚至直到三十多年后退休的时候还是心有余悸. 这本讲义体系严谨, 叙述简明, 而且作为讲义细致到连参考书在哪个图书馆可以借到都标得清清楚楚 (这些就没有翻译了), 可见一斑.

本书可以作为研究生泛函分析基础课教材, 也可以作为本科生高年级泛函方向选修课教材.

一门课程的开设, 不应当仅仅是为了完成教学计划. 教一门课, 不仅要让学生学到一些数学的公式和定理、一些工具乃至一套方法, 还应当让学生能够体会到相应分支的思想, 相应结果的来龙去脉. 在开设一门基础课程的时候, 我们应当意识到, 数学系的本科生乃至硕士研究生中绝大部分将来都不会从事数学研究, 或者说不会从事这一课程相应分支的研究, 那么对于他们来说, 究竟什么才是最重要最有用的, 是值得每一个任课教师思考的问题. 在这一方面, 和世界先进水平相比, 我们还有很大的提高发展空间.

感谢法国国家科研中心 (CNRS) 的 Michel Enock 教授, 在译者离开巴黎的前夕

从书架上翻出这本讲义相赠. 从他那里, 译者了解到了法国数学界的很多掌故. 他还帮助我们得到了作者的出版授权.

感谢美国 Vanderbilt 大学, 为译者提供了一个平静的工作环境, 使之可以在业余时间完成本书的翻译.

在本书定稿的过程中, 复旦大学数学科学学院黄昭波老师给了译者很多帮助, 在此致谢.

姚一隽

2008 年 5 月于美国田纳西州

修订说明

四年前, 当我请 Anantharaman-Delaroche 教授为本书的中译本撰写序言的时候, 她写来的稿子有一处让我不太明白. 就是她说这本讲义从头讲起, "直到无界自共轭算子的谱分解和对称算子的自共轭扩张的研究", 但是我手头的那本讲义 (也就是中文版的原稿) 是只有有界算子的内容的. 经过比较, 她做出结论, "原来 Dixmier 把无界算子的部分都删掉了, 真遗憾! " 这样我才知道, 这本讲义还曾经有一个内容更多的版本. (说 "曾经" 是因为我那本几乎是最后的版本, Anantharaman-Delaroche 教授的那本时间更早.)

后来 Anantharaman-Delaroche 教授就把她手头那本的后三章复印了给我. 当时就和高等教育出版社约定, 等第一批 3000 册售完需要重印的时候, 再做修订.

在此期间, 我还曾经有机会向 Dixmier 教授询问, 为什么他要把无界算子的那部分删除. 得到的回答很简单, 也很耐人寻味: "我教下来发觉这些内容一个学期讲不完, 所以就把内容删掉了一点."

从技术上说, 他做的删节工作, 是把现在的 VI, VII, VIII 三章删除, 只保留 7.1, 7.5, 7.6 三节, 并利用下面的引理, 在完全回避掉无界算子的情况下, 仍然严格地把 Stone 定理叙述 (只不过把 "存在唯一的自共轭算子" 改成了 "存在唯一的恒等映射的分解") 并证明出来了.

引理. 设 $\mu \in \mathbb{R}$, f 是 $\mathbb{R}$ 上 $(-\infty, \mu]$ 的特征函数. 存在 $\mathbb{R}$ 上一列函数 $(f_1, f_2, \cdots)$ 满足下述条件:

(i) 该序列在 $\mathbb{R}$ 上一致有界;

(ii) 该序列简单收敛于 f;

(iii) 每一个 f_n 都是形如 $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$ (其中 $t \in \mathbb{R}$) 的函数的线性组合.

设整数 $n > 0$. 设 g_n 是周期为 $2n$ 的函数, 它在 $[\mu - n, \mu + n]$ 上定义如下: $g_n(\mu - n) = 0$, $g_n\left(\mu - n + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, $g_n(\mu) = 1$, $g_n\left(\mu + \dfrac{1}{n}\right) = 0$, $g_n(\mu + n) = 0$, 而 g_n 在区间 $\left[\mu - n, \mu - n + \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[\mu - n + \dfrac{1}{n}, \mu\right]$, $\left[\mu, \mu + \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[\mu + \dfrac{1}{n}, \mu + n\right]$ 上是线性函数. 这个函数是连续的, 且序列 $(g_1, g_2, \cdots)$ 当 $n \to +\infty$ 时简单收敛于 f. 另一方

面, 根据 Fourier 级数理论, 存在满足 (iii) 的函数 f_n 使得对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 都有

$$|g_n(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

这样得到的序列 $(f_1, f_2, \cdots)$ 就具有引理所要求的性质.

由这个引理, 就可以得到 Stone 定理的唯一性部分的证明.

Dixmier 教授还说过, 他当年在法国一个学期讲不完的内容, "说不定比较用功的学生, 比如中国学生, 能够在一个学期里学完". 根据译者的教学经验, 现在这个版本基本上相当于一个学期的研究生 "泛函分析" 课程所需的内容, 也可以作为高年级本科生 "泛函分析续论" 课程 (尽管译者还不知道中国哪个大学有这样一门课) 的教材.

感谢德国波恩的 Max-Planck 数学研究所, 为译者提供了一个平静的工作环境, 使之可以顺利完成本书中译本的修订工作.

姚一隽

2012 年 8 月于德国波恩

名词索引

H

J

K

L

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

本书是由J. 迪斯米埃在20世纪70年代开设线性算子谱理论课程时手写油印的讲义翻译而来的。在相当长的一段时期里，该讲义在法国被这一领域的所有学生认真反复阅读，也被教授这一课程的教师大量使用。在本书中，迪斯米埃以完整地陈述谱定理为核心目的，通过最基本也是最常用的一些例子让读者明白所引进的每一个概念、每一条定理，都是在后续内容中必不可少的，并娴熟地应用各种技巧对定理给出精确、简短而优雅的证明——这就是布尔巴基成员的作品。而本书中体系的严谨与清晰明了则是作者一贯的写作风格。

本书可以作为研究生泛函分析基础课的教材，也可以作为大学本科高年级选修课教材。对于非泛函方向的学生来说，本书的处理方式(把所有的问题都放在Hilbert空间的框架下讨论，而不是放在更加一般的空间里面)可以让读者用最少的精力抓住这一理论最为核心的内容。

学科类别：数学

academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-036469-9

9 787040 364699 >

定价 39.00 元